

Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2012/13

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO DEL 30 MAGGIO 2013

Prof. Stefano De Marchi

1 MLS sia 1d che 2d

1. Facciamo alcuni esperimenti univariati con la tecnica MLS (*moving least squares*) con RBF a supporto globale, quali le gaussiane di Laguerre. Lo scopo dell'esercizio è comprendere l'effetto dello *scaling* sulla convergenza dei MLS. La funzione che si considera è una funzione di Franke *mollificata* come segue

$$f(x) = \left(15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}}\right) \left[\frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49} \right) + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2} \right],$$

il mollificatore è $g(x) = 15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}}$.

Sia D il parametro di scalatura, dell'intervallo $[0, 1]$, e $D \in \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0\}$. Si prenda una griglia con $N = 2^k + 1$, $k = 1, \dots, 14$ punti equispaziati di $[0, 1]$. L'approssimante è

$$P_f(x) = \frac{1}{\pi D} \sum_{k=1}^N f(x_i) e^{\frac{(x-x_i)^2}{Dh^2}}, \quad x \in [0, 1]$$

e $h = 1/(N - 1)$. Questo corrisponde a un parametro di forma ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{D}h} = \frac{N-1}{\sqrt{D}} = \frac{2^k}{\sqrt{D}}$$

ovvero siamo nel caso di un'approssimazione *stazionaria*.

Usare la funzione `ApproxMLSAprox1D.m` che consente di ottenere dei plots su Gaussiane di Laguerre, per vari valori di D .

Si noterà che se $D \geq 2$ l'ordine di approssimazione è $\mathcal{O}(h^2)$, mentre per valori minori si osserverà una saturazione e quindi uno stallo dell'errore.

La funzione `ApproxMLSAprox1D.m` usa gaussiane di Laguerre di ordini $p = 0, 1, 2$ (ricordo che nel caso unidimensionale tali funzioni sono $\Phi(x) = e^{-x^2} L_n^{p/2}(x^2)$ dove $L_n^{p/2}$ sono polinomi di Laguerre di grado n e ordine $p/2$) e valori di $D = 2, 4, 6$. In quel caso gli ordini di convergenza sono h^2, h^4 e h^6 rispettivamente (come previsto dalla teoria vista).

Ricordo che i polinomi di Laguerre sono definiti come segue

$$L_n^{p/2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n + p/2}{n - k} x^k.$$

2. Nel caso 2d, facciamo un esperimento simile alla seconda parte dell'esercizio precedente. Usiamo ancora gaussiane di Laguerre $\Phi(x) = e^{-\|\epsilon x\|^2} L_n^{p/2}(\|\epsilon x\|^2)$ con fattore di scalatura $\epsilon = \frac{1}{\pi}$. I dati da approssimare li campioniamo sulla funzione di Franke 2d mollificata come segue

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(x, y) \left[\frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4-(9y-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49-(9y+1)^2/10} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4-(9y-3)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2} \right], \end{aligned}$$

con il mollificatore $g(x, y) = 15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}-\frac{1}{1-(2y-1)^2}}$.

I data-sites sono presi su una griglia uniforme di $(2^k + 1)^2$ punti (con $k = 1, \dots, 5$) su $[0, 1]^2$. Per D consideriamo i valori $D = 1, 2, 5/2$.

Vedremo che otterremo l'ordine di convergenza teorico, prendendo sempre più data sites. Per i valori proposti di D si dovrebbero ottenere errori del tipo $\mathcal{O}(h^{1.83}), \mathcal{O}(h^{2.80}), \mathcal{O}(h^{3.00})$, rispettivamente.

2 Cambio di base

1. Qui lo scopo è di comprendere l'effetto di un cambio di base sul numero di condizionamento della matrice d'interpolazione. Si chiede di calcolare κ_2 (il numero di condizionamento in norma 2) usando i 3 approcci, nel caso di *thin plate splines* con punti e centri nel quadrato unitario $[0, 1]^2$:

- (i) la base standard che consiste delle funzioni $\Phi(\cdot, x_j)$, $j = 1, \dots, N$ e monomi (vedi funzione `RBFInterpolation2Dlinear.m`)
- (ii) i reproducing kernels $K(\cdot, x_j)$ (funzione `tpsK.m`)
- (iii) usando la matrice C con $C_{i,j} = s(x_i, x_j)$, $i, j = M + 1, \dots, N$ (funzione `tpsH.m`)

Si osservi che le funzioni Matlab indicate, producono sia la matrice d'interpolazione che la matrice di valutazione. Pertanto, per costruire e visualizzare l'interpolante basterà considerare `RBFInterpolation2D.m` e cambiare le linee in cui si definiscono le matrici IM ed EM.

Ad esempio, nel caso si usi `tpsK.m`, le linee si modificano come segue

```
IM=tpsK(dsites,ctrs)
EM=tpsK(epoints,ctrs)
```

Si chiede di fare degli esperimenti in cui il numero dei data-sites varia cosicché le loro *separation-distances* assumano valori $1/8, 1/16, 1/32, 1/64$.

Produrre una tabella del tipo

spaziatura	approccio standard	reproducing kernel	con matrice C

2. Ripetere l'esperimento di prima, questa volta tenendo fisso il numero di data-sites, prendendo 5×5 punti equispaziati. Qui si scala il dominio considerando il quadrato $[0, a]^2$, con a parametro di scalatura. Si noterà che q_X cambia e che l'effetto di tale procedimento non influenza di molto i numeri di condizionamento nei primi 2 approcci, mentre l'approccio con matrice C risulterà completamente insensibile alla riscalatura (come visto a lezione, essendo le TPS delle poliarmoniche).

Produrre anche qui una tabella

parametro a	approccio standard	reproducing kernel	con matrice C

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:

<http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010>