Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2012/13

Esercitazione di laboratorio del 5 aprile 2013

Prof. Stefano De Marchi

1 Esercitazione proposta

1. Plottare alcune funzioni radiali strettamente definite positive centrate nell'origine

   - Le funzioni *gaussiane di Laguerre* per $n = 1, 2$ ed $s = 1, 2$

s	$n = 1$	$n = 2$
1	$(3/2 - x^2)\mathtt{e}^{-x^2}$	$(15/8 - 5/2\,x^2 + 1/2x^4)\mathtt{e}^{-x^2}$
2	$(2 - \Vert\mathbf{x}\Vert^2)\mathtt{e}^{-\Vert\mathbf{x}\Vert^2}$	$(3 - 3\Vert\mathbf{x}\Vert^2 + 1/2\Vert\mathbf{x}\Vert^4)\mathtt{e}^{-\Vert\mathbf{x}\Vert^2}$

     per $s = 1$, $x \in [-1, 1]$ mentre per $s = 2$, $\mathbf{x} \in [-1, 1]^2$.

   - Le funzioni di *Poisson* per $s = 2, 3, 4$ in $[-1, 1]^2$ usando come parametro di forma $\epsilon = 10$ (da introdurre opportunamente nelle definizioni qui sotto)

$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
$J_0(\Vert\mathbf{x}\Vert)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(\Vert\mathbf{x}\Vert)}{\Vert\mathbf{x}\Vert}$	$\dfrac{J_1(\Vert\mathbf{x}\Vert)}{\Vert\mathbf{x}\Vert}$

     dove J_p è la *funzione di Bessel di primo tipo di ordine* p, che in Matlab si chiama `besselj(p, z)` (dove `z` è un array di punti su cui valutare la funzione).

   - Le funzioni di *Matérn* in $[-1, 1]^2$, per tre diversi valori di β con parametro di forma $\epsilon = 10$

$\beta_1 = \frac{s+1}{2}$	$\beta_2 = \frac{s+3}{2}$	$\beta_3 = \frac{s+5}{2}$
$\mathtt{e}^{-\Vert x\Vert}$	$(1 + \Vert x\Vert)\,\mathtt{e}^{-\Vert x\Vert}$	$\left(3 + 3\Vert x\Vert + \Vert x\Vert^2\right)\mathtt{e}^{-\Vert x\Vert}$

     Si noti che per le funzioni di *Matérn* per β_1 non è differenziabile nell'origine; per β_2 è $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^s)$ e per β_3 è $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^s)$.

   - Le funzioni *multiquadriche inverse generalizzate* $\Phi(x) = (1 + \Vert x\Vert^2)^{-\beta}$, $\quad s < 2\beta$, in $[-1, 1]^2$, nei due seguenti casi (usando $\epsilon = 5$): $\beta = 1/2$ (che corrisponde alla multiquadrica inversa di Hardy) e $\beta = 1$ (che corrisponde alla quadrica inversa).

   - Le funzioni *potenze troncate* $\Phi(x) = (1 - \Vert x\Vert)_+^l$ nei casi $l = 2, 4$ (in $[-1, 1]^2$).

   - Le funzioni *potenziali di Whittaker* sempre nel quadrato in $[-1, 1]^2$, per diverse scelte dei parametri α, k e β

α	$k=2$	$k=3$
0	$\dfrac{\beta - \|x\| + \|x\| \mathtt{e}^{-\beta/\|x\|}}{\beta^2}$	$\dfrac{\beta^2 - 2\beta\|x\| + 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 \mathtt{e}^{-\beta/\|x\|}}{\beta^3}$
1	$\dfrac{\beta - 2\|x\| + (\beta + 2\|x\|)\mathtt{e}^{-\beta/\|x\|}}{\beta^3}$	$\dfrac{\beta^2 - 4\beta\|x\| + 6\|x\|^2 - (2\beta\|x\| + 6\|x\|^2)\mathtt{e}^{-\beta/\|x\|}}{\beta^4}$

Per i plots scegliere $\beta = 1$.

2. Come per l'esercitazione del 19 marzo 2013, s'interpoli la funzione di Franke su una griglia 20×20 di punti di Chebyshev con funzioni di Poisson e/o di Matérn. Valutare anche l'errore RMSE.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:
`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`