Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2014/15

Esercitazione di laboratorio del 14 maggio 2015

Prof. Stefano De Marchi

1 Esercitazione proposta

1. Si determini il parametro ottimale ϵ_{opt} mediante il metodo *trial & error* per le seguenti funzioni univariate:

   (a)
$$f_1(x) = \mathtt{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \,.$$

   (b)
$$f_2(x) = \frac{3}{4}\left(\mathtt{e}^{-(9x-2)^2/4} + \mathtt{e}^{-(9x+1)^2/49}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{e}^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10}\mathtt{e}^{-(9x-4)^2} \,,$$

   è una *variante della funzione di Franke.*

   (c)
$$f_3(x) = (1 - |x - 0.5|)^5 \left(1 + 5|x - 0.5| - 27(x - 0.5)^2\right) \,,$$

   che è una funzione RBF $\mathcal{C}^2$ oscillatoria a supporto compatto, detta *funzione di Gneiting* (qui centrata in $(0.5, 0.5)$).

   Si chiede, per ogni funzione f_i, $i = 1, 2, 3$, di produrre una tabella della forma

N	$\\|P_{f_i} - f_i\\|_\infty$	ϵ_{opt}
3		
5		
9		
17		
33		
65		

   dove, per ogni N, ϵ_{opt} corrisponde al punto di minimo delle curve d'errore in norma infinito, al variare del parametro $\epsilon \in [0, 20]$. Come funzione di base per l'interpolante P_{f_i} si prenda la funzione gaussiana.

2. Calcolo dell'errore usando la *funzione potenza* o *power function* (PF).

   (a) Fare il plot della sup-norm della PF, $\|P_{\Phi,X}\|_\infty$, usando la formula
$$P_{\Phi,X}(x) = \sqrt{\Phi(x,x) - (b(x))^t A^{-1}\, b(x)}$$
   con A matrice d'interpolazione e $b(x) = [\Phi(\cdot, x_1), \cdots, \Phi(\cdot, x_N)]^t$, al variare del parametro di forma $\epsilon \in [0, 20]$, usando il kernel gaussiano 1D per $N = 3, 5, 9, 17, 33, 65$ e 2D per

valori di $N = 9, 25, 81, 289$. Prendere punti equispaziati sia come centri che come punti di valutazione della power function. Si dovrebbe vedere che all'aumentare del numero dei centri il massimo della PF. Usare la funzione `Powerfunction2D.m`.

(b) Produrre quindi una tabella, simile a quella dell'esercizio precedente, invece della colonna dell'errore riportare il $\texttt{cond}(A)$ in corrispondenza al valore ϵ_{opt} del parametro di forma.

3. Applicare il metodo di *cross-validation* o *Leave-One-Out method* per interpolare

   (a) La funzione modificata di Franke 1-dimensionale

   $$f(x) = \frac{3}{4}\left(\mathtt{e}^{-(9x-2)^2/4} + \mathtt{e}^{-(9x+1)^2/49}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{e}^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10}\mathtt{e}^{-(9x-4)^2},$$

   usando la funzione di Wendland (che usa la funzione `DistanceMatrixCSRBF_new.m`), $\varphi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$, su punti equispaziati e punti di Chebyshev. Fare il plot delle curve degli errori in modulo al variare di $\epsilon \in [0, 20]$ e $N = 3, \ldots, 65$, come nella tabella dell'esercizio 1.

   (b) Come nel caso precedente, ma per la funzione 2D

   $$f(x, y) = \texttt{sinc}(x)\texttt{sinc}(y)$$

   mediante l'uso del kernel gaussiano.

   Lo script Matlab, `LOOCV2D.m`, implementa il `Leave One Out Cross Validation method`, in 2D.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:
`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`