

Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2014/15

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO DEL 28 MAGGIO 2015

Prof. Stefano De Marchi

Esercitazione proposta

1 MLS sia 1d che 2d

1. Facciamo alcuni esperimenti univariati con la tecnica MLS (*moving least squares*) con RBF a supporto globale, quali le gaussiane di Laguerre. Lo scopo dell'esercizio è comprendere l'effetto dello *scaling* sulla convergenza dei MLS. La funzione che si considera è una funzione di Franke *mollificata* come segue

$$f(x) = \left(15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}} \right) \left[\frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49} \right) + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2} \right],$$

il mollificatore è $g(x) = 15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}}$.

Sia D il parametro di scalatura, dell'intervallo $[0, 1]$, e $D \in \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 4.0, 8.0\}$. Si prenda una griglia con $N = 2^k + 1$, $k = 1, \dots, 14$ punti equispaziati di $[0, 1]$. L'approssimante è

$$P_f(x) = \frac{1}{\pi D} \sum_{k=1}^N f(x_i) e^{\frac{(x-x_i)^2}{Dh^2}}, \quad x \in [0, 1]$$

e $h = 1/(N - 1)$. Questo corrisponde a un parametro di forma ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{D}h} = \frac{N-1}{\sqrt{D}} = \frac{2^k}{\sqrt{D}}$$

ovvero siamo nel caso di un'approssimazione *stazionaria*.

Usare la funzione `ApproxMLSAprox1D.m` che consente di ottenere dei plots su Gaussiane di Laguerre, per vari valori di D .

Si noterà che, fissata una delle gaussiane di Laguerre, quando $D \geq 2$ si raggiunge l'ordine di approssimazione $\mathcal{O}(h^2)$ o superiore, mentre per valori minori si osserverà una saturazione e quindi uno stallo dell'errore.

La funzione `ApproxMLSAprox1D.m` di Fassahauer usa gaussiane di Laguerre di ordini $p = 0, 1, 2$ (ricordo che nel caso unidimensionale tali funzioni sono $\Phi(x) = e^{-x^2} L_n^{p/2}(x^2)$ dove $L_n^{p/2}$ sono polinomi di Laguerre di grado n e ordine $p/2$, vedi più oltre per la loro definizione), valori di $D = 2, 4, 6$ e ordini di convergenza sono h^2, h^4 e h^6 rispettivamente (come previsto dalla teoria vista). I polinomi di Laguerre sono

$$L_n^{p/2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n + p/2}{n - k} x^k.$$

2. Nel caso 2d, facciamo un esperimento simile alla seconda parte dell'esercizio precedente. Usiamo ancora gaussiane di Laguerre $\Phi(x) = e^{-\|\epsilon x\|^2} L_n^{p/2}(\|\epsilon x\|^2)$ con fattore di scalatura $\epsilon = \frac{1}{\pi}$. I dati da approssimare li campioniamo sulla funzione di Franke 2d mollificata come segue

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(x, y) \left[\frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4-(9y-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49-(9y+1)^2/10} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4-(9y-3)^2/4} - \frac{1}{5} e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2} \right], \end{aligned}$$

con il mollificatore $g(x, y) = 15e^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}-\frac{1}{1-(2y-1)^2}}$.

I data-sites sono presi su una griglia uniforme di $(2^k + 1)^2$ punti (con $k = 1, \dots, 5$) su $[0, 1]^2$. Per D consideriamo i valori $D = 1, 2, 2.5$.

Vedremo che otterremo l'ordine di convergenza teorico, prendendo sempre più data sites. Per i valori proposti di D si dovrebbero ottenere errori del tipo $\mathcal{O}(h^{1.83}), \mathcal{O}(h^{2.80}), \mathcal{O}(h^{3.00})$, rispettivamente.

2 Approssimazione di Shepard

L'approssimante di Shepard è data come

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \frac{w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s. \quad (1)$$

In \mathbb{R}^2 , si considerino le funzioni peso

$$w_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = e^{-\epsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}, \quad \text{gaussiana, globale}$$

$$w_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = (1 - \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)_+^4 (4\epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + 1), \quad \text{Wendland, locale}$$

e si voglia approssimare la funzione di Franke, campionata su punti equispaziati di $[0, 1]^2$.

1. **Caso non-stazionario.** Usando $\epsilon = 3$, si produca per ognuna delle funzioni peso, una tabella

	stazionario			non-stazionario	
N	RMS-errors	r	N	RMS-error	r
3					
5					
9					
17					
33					
65					

dove N indica il numero di punti equispaziati in *ciascuna direzione spaziale* (quindi complessivamente saranno N^2) e r l'ordine di convergenza determinato usando la formula

$$r_k = \frac{\ln(e_{k-1}/e_k)}{\ln(h_{k-1}/h_k)}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2)$$

dove e_k indica il RMS-error per l'esperimento k -esimo e h_k la *fill-distance* corrispondente.

Si noti, che per punti uniformemente distribuiti il rapporto delle fill-distances è sempre 2.

Infine, gli errori RMS si possono calcolare su una griglia di riferimento 40×40 di punti equispaziati su $[0, 1]^2$.

2. **Caso stazionario.** Partendo da $\epsilon = 3$, lo si moltipichi per il fattore 2 ad ogni dimezzamento della fill-distance.

Si dovrebbe verificare che il metodo di Shepard, nel caso stazionario, ha un ordine $\mathcal{O}(h)$.

- Ripetere i calcoli con la funzione `f=f+0.03*rand(size(f))` ovvero con la funzione di Franke perturbata del 3%. In particolare, nel caso stazionario usare i valori $\epsilon = 48$ e $\epsilon = 12$.

Usare i programmi `Shepard2D.m` e `Shepard_CS.m` per fare i calcoli richiesti.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:

<http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010>