Seconda prova parziale di ANALISI MATEMATICA I

Prof. S. De Marchi, Dott. M. Caliari e Dott. V. Recupero

Verona, 16 marzo 2006

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n \, (x+1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

   al variare di $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin^3 x}{\log(1+x) - \sin x}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{-x^2 - 2x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   (in particolare continuità, crescenza e decrescenza). Si calcoli inoltre l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette $y = 0,\ x = -1$ e $x = 0$.

4. (**solo per MatApp**)

   (i) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{tg}^2 x} - 1}{x \log(1 + \sqrt[3]{x^2})} dx.$$

   (ii) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che esiste una costante $C > 0$ per cui $f'(x) \geq C$. Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

`Tempo:` 1.5 ore per i Multimediali e 2 ore per i Matematici.

Soluzioni

1. Usando il criterio del rapporto applicato al modulo otteniamo che perchè ci sia convergenza è necessario che

$$5\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\,\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(x+1)^n}\right| = 5|x+1|\sqrt{n/(n+2)}\,.$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n/(n+2)} = 1$ affinchè converga in valore assoluto deve accadere che

$$5|x+1| < 1 \iff -\frac{6}{5} < x < -\frac{4}{5}\,.$$

Dobbiamo ora vedere che accade per $x = -\frac{6}{5}$ e $x = -\frac{4}{5}$.

$x = -\frac{6}{5}$: la serie si riduce $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ che diverge.

$x = -\frac{4}{5}$: la serie diventa la serie di segno alterno $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ che si verifica facilmente essere convergente mediante il criterio di Leibniz.

Riassumendo se $-\frac{6}{5} < x \leq -\frac{4}{5}$ la serie converge assolutamente e quindi converge.

2. Per $x \to 0$ si ha

$$\frac{e^{x^2}-1+\sin^3 x}{\log(1+x)-\sin x} = \frac{x^2+o(x^2)+x^3+o(x^3)}{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}$$
$$= \frac{x^2+x^3+o(x^2)}{-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^2)} \to -2.$$

3. Dominio $-2 < x \leq 0$. Continua. Segno: negativa.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(-x^2-2x)^{3/2}}$$

Funzione crescente.

$$f''(x) = \frac{-2x^2-x}{(-x^2-2x)^{5/2}}$$

Funzione convessa in $-1/2 < x < 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(x)dx &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{-2x-2}{\sqrt{-x^2-2x}} + \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x}}\right)dx = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-x^2-2x} + 2\arcsin(x+1)\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}(2\pi/2-1)\end{aligned}$$

Qualora sembrasse troppo difficile, si può considerare

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2-2x}}$$

e l'integrale tra $x = -1$ e $x = -1/2$.

4. (i) La funzione integranda è positiva e continua in $(0, 1]$. Per $x \to 0$ si ha

$$\frac{e^{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{x\log(1+\sqrt[3]{x^2})} \sim \frac{\operatorname{tg} x^2}{x\sqrt[3]{x^2}} \sim \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

per cui l'integrale dato converge in virtù del criterio del confronto asintotico.

(ii) Per il teorema del valor medio si ha che per ogni $x > 0$ esiste $\xi_x \in (0, x)$ tale che

$$f(x) = f(0) + f'(\xi_x)x \geq f(0) + Cx \to +\infty$$

perché $C > 0$. La tesi segue dal teorema del confronto.