Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi, Dott. V. Recupero e Dott. M. Caliari

`Verona, 17 luglio 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Provare che la funzione $f(x) = \cos x - \dfrac{x}{4}$ ha un unico punto ξ, nell'intervallo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, per cui $f(\xi) = 0$. Si dia una stima di ξ a meno di $\epsilon = 10^{-1}$, testando il valore $|f(x)|$.

2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4 + 2x^{10}}$$
($\sinh x$ denota il seno iperbolico di x).

3. (a) Studiare la seguente funzione e tracciarne un grafico approssimativo:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
(log denota il logaritmo in base e). È richiesto lo studio delle derivate prima e seconda con particolare riferimento al punto $x = 0$. Si trovino poi estremo inferiore e superiore di f ed eventuali punti di massimo e minimo.

   (b) (*solo per matematici applicati*) Posto
$$F(x) := \int_{x^2}^{1} \frac{\sin t}{t} dt,$$
se ne calcoli il imite per $x \to +\infty$ della derivata prima, cioè $\lim_{x \to +\infty} F'(x)$.

4. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x}$, l'asse delle ascisse e le rette $x = \dfrac{1}{2}$ e $x = 3$. *(Solo per Matematici applicati)*: calcolare anche il volume del solido generato con la rotazione attorno l'asse delle ascisse di $f(x)$ sull'intervallo $[1, 3]$.

`Tempo:` 2 ore e 2,5 per i Matematici Applicati.

Soluzioni

1. $f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo dato. Inoltre $f(\pi/4) = \cos(\pi/4) - \pi/16 > 0$ mentre $f(\pi/2) < 0$ allora sappiamo che esiste almeno un punto in cui la funzione si annulla. Ma $f(x)$ è strettamente decrescente su $[\pi/4, \pi/2]$ questo ci assicura che esiste un unico ξ dove si annulla.

   Per calcolarlo possiamo procedere usando ad esempio il metodo di Netwon a partire da un punto iniziale, es. $x_0 = \pi/4$.

   Si ha

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{x_i \sin(x_i) + \cos x_i}{\sin x_i + 1/4} \quad i = 0, 1, ...$$

   da cui $x_1 = 1.319$, dove si ha $f(x_1) = -0.0806$, si puo' assumere come approssimazione di 10^{-1} dello zero cercato poiché $f(x)$ è strettamente decrescente. Infatti, procedendo, la radice cercata vale $\xi = 1.2524$. Si poteva procedere anche con il metodo di bisezione.

2. Per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4 + 2x^{10}} \\ =&\frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)}{x^4 + 2x^{10}} \\ =&\frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + 2x^{10}} \to 1/3 \end{aligned}$$

   per $x \to 0$.

3. Il dominio di f è $\mathbb{R}$. La funzione è pari per cui basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e, per un noto limite fondamentale, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, per cui f è continua in $\mathbb{R}$. Per $x > 0$, f è derivabile e si ha

$$f'(x) = x(2\log x + 1) \qquad (\text{per } x > 0).$$

   Poiché $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$ si deduce che f è derivabile in $x = 0$ e che $f'(0) = 0$. Si ha

$$\text{per } x > 0: \qquad f'(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/2}$$

   Quindi f è decrescente su $[0, e^{-1/2}]$ ed è crescente su su $[e^{-1/2}, +\infty)$. Si ha poi

$$f''(x) = 2\log x + 3 \qquad (\text{per } x > 0)$$

   da cui $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq e^{-3/2}$, per cui f è concava su $[0, e^{-3/2}]$ ed è convessa su $[e^{-3/2}, +\infty)$. Si noti che non esiste $f''(0)$. Il punto $x = e^{-1/2}$ è l'unico punto di minimo positivo di f ed è punto di minimo assoluto: il minimo è $\frac{-1}{2e}$. Il punto $x = e^{-3/2}$ è un punto di flesso. f non ha massimo essendo $\sup f = +\infty$.

4. Si ha
$$F(x) = -\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$$
per cui per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e per la formula di dervazione di funzioni composte si ha $F'(x) = -\frac{\sin(x^2)}{x^2} 2x = -2\frac{\sin(x^2)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$ in quanto $\sin(x^2)$ è limitata e $1/x$ tende a zero.

5. Per rispondere alla domanda si tratta di calcolare $\int_{1/2}^3 f(x)dx$. Ora $f(x) = \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}$. Quindi una primitiva elementare è facile da determinare.

   Il risultato è: $\int_{1/2}^3 f(x)dx = 5\log(2) - 3\log(3)$.

   solo per i MatApp. Si tratta di calcolare
$$V = \pi \int_1^3 f(x)^2 dx\,.$$
   Ora $(f(x))^2 = \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{4}{x+1^2} - \frac{4}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2}\right)$. Risolvendo si ottiene $V = \pi(4\log(2/3) + 5/3)$.