Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi

`Verona, 19 dicembre 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \left[\log(\mathrm{e}^7 - \frac{x}{n})\right]^n}{4^n - 1}\ , \ x \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^5 - \mathrm{e}^{x^5}}{\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^2 - 1}$$

3. Siano $h(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \log(y)$. Studiare la funzione $f(x) = g(g(h(x))$ tracciandone anche un grafico approssimativo. In particolare è richiesto il calcolo della derivata prima e seconda di f .

4. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{1/x^2} \sin^3(\sqrt{t})\, dt}{-\frac{1}{x^5}}$$

   Solo per MatApp: la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x^2} \sin^3(\sqrt{t})\, dt$ è integrabile su $\mathbb{R}_+$?

`Tempo:` 2 ore e 2,5 per i Matematici Applicati.

Soluzioni

1. Usando il criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{\frac{n^5\left[\log\left(\mathrm{e}^7-\frac{x}{n}\right)\right]^n}{4^n-1}}=\frac{\sqrt[n]{n^5}\log\left(e^7-x/n\right)}{\sqrt[n]{4^n-1}}$$

sapendo che i fattori sotto radice vanno a 1 e 4 e che il fattore col logaritmo va a 7, in base al criterio della radice si ottiene il valore $7/4>1$ e quindi la serie diverge.

2. Come si vede subito si tratta di una forma indeterminata $0/0$. Moltiplicando numeratore e denominatore per x^2 il limite dato è equivalente a calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos x^5-\mathrm{e}^{x^5})}{\log^2(1+x)-x^2}\ .$$

Ora, usando gli sviluppi di Taylor di $\cos(x^5)$ e di $\log(1-x)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos x^5-\mathrm{e}^{x^5})}{\log^2(1+x)-x^2} &= \frac{x^2\left(1-x^{10}/2+o(x^{10})-1-x^5+o(x^5)\right)}{(x-x^2/2+o(x^2))^2-x^2}\\ &= \frac{x^5+o(x^5)}{x^2/4+o(x^2)}\to 0\ .\end{aligned}$$

3. La funzione composta è $f(x)=\log(\log(x^2-1))$. È pari. Il dominio si ottiene imponendo $x^2-1>0$, da cui $x>1$ e $x<-1$, e $\log(x^2-1)>0$. Pertanto il dominio di f sono tutti i numeri reali tali che $x>\sqrt{2}$ e $x<-\sqrt{2}$.

   Essendo pari, la studieremo solo per $x>\sqrt{2}$

   - $f(x)=0$ se $x=\pm\sqrt{1+e}$.
   - $\lim_{x\to\sqrt{2}+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
   - $f'(x)=\frac{1}{\log(x^2-1)}\,\frac{1}{x^2-1}\,2x$. Numeratore >0 e denominatore >0 implica che la funzione è sempre crescente. $f'(x)=0\iff x=0$ che non sta nel dominio. La funzione non ha punti estremali.
   - $f''(x)=\frac{2(x^2-1)\log(x^2-1)-4x^2(\log(x^2-1)+1)}{(x^2-1)^2\log^2(x^2-1)}$

4. Il limite dato è una forma indeterminata $0/0$. Applicando de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x^2}}\sin^3(\sqrt{t})dt}{-\frac{1}{x^5}}\underbrace{=}_{H}\frac{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{5}{x^6}}=-\frac{2}{5}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^3=-\frac{2}{5}.$$

per MatApp: la risposta è ovvia, in quanto abbiamo appena visto che la funzione integrale $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x^2}}\sin^3(\sqrt{t})dt$ all'infinito si comporta come $-1/x^5$ che è integrabile.

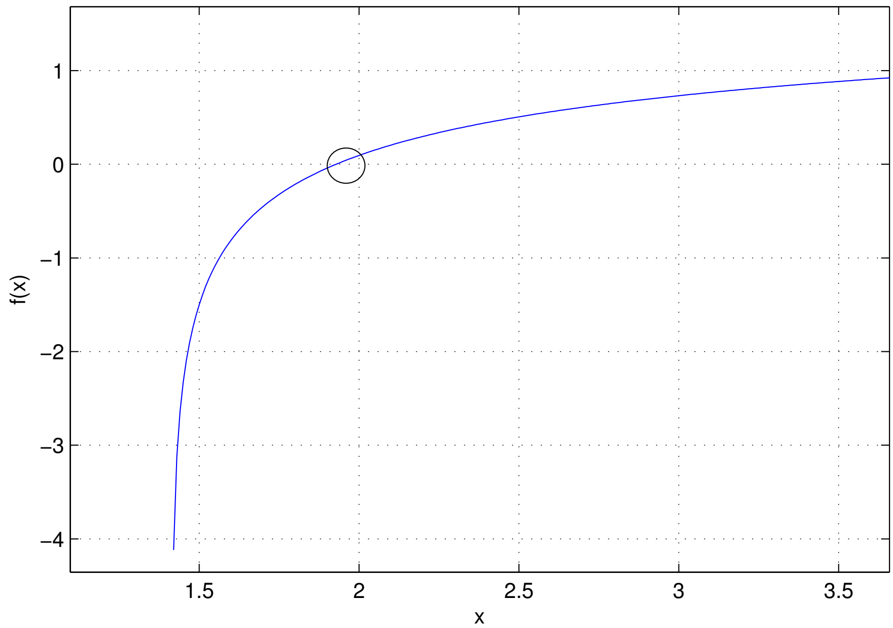

Figura 1: Grafico della funzione $f(x),\ x > \sqrt{2}$