Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi, Dott. V. Recupero e Dott. M. Caliari

`Verona, 19 giugno 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \left[\log(\mathrm{e}^6 + \frac{2x}{n})\right]^n}{5^n - 7}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sinh x}$$
($\sinh x$ denota il seno iperbolico di x).

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne un grafico approssimativo:
$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \le 0 \\ x|\log x|^{1/3} & \text{se } 0 < x < 1/e \\ (2x + e^{-1})/3 & \text{se } x \ge 1/e \end{cases}$$
In particolare è richiesto uno studio dettagliato della derivabilità di f e degli eventuali massimi e minimi di f. (e denota il numero di Nepero e log denota il logaritmo in base e).

    - *Solo MatApp.* Si calcoli, se esiste,
    $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t - t \cos t}{t^2 \sin t} dt}$$
    giustificando la risposta.

4. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}\,\sqrt[7]{(x-2)^{10}}}.$$
    (i) Dire se la $f(x)$ è integrabile (in senso improprio) su $(0, 1)$.
    (ii) *Solo MatApp.*: verificare se la funzione è integrabile, sempre in senso improprio, su $(3, +\infty)$.

`Tempo:` 2 ore e 2,5 per i Matematici Applicati.

Soluzioni

1. Anzitutto osserviamo che il logaritmo è definito se $x > -ne^6/2$. Pertanto consideriamo come insieme di definizione non $\mathbb{R}$ ma questo insieme. Poi applichiamo il criterio della radice n-esima.

$$\sqrt[n]{\frac{n^3\left[\log(\mathrm{e}^6+\frac{2x}{n})\right]^n}{5^n-7}} = \log(\mathrm{e}^6+\frac{2x}{n})\ \sqrt[n]{n^3}\ \frac{1}{\sqrt[n]{5^n-7}}$$

Il secondo e terzo fattore tendono a 1 e 1/5, rispettivamente mentre il primo a 6 **indipendente da x**. Quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ lo studio della convergenza della serie non cambia.

Pertanto $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 6/5 > 1$ e quindi la serie data diverge.

Osserviamo che allo stesso risultato si poteva pervenire usando il criterio del rapporto.

2. Per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sinh x} &\sim \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \\
&= \frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^3} \\
&= \frac{x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)-x+\dfrac{x^3}{2}-xo(x^2)}{x^3} \\
&= \frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3} \to \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

quindi il limite proposto esiste ed è uguale a 1/3.

3. Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Per $x \le 1$ abbiamo il ramo superiore di una parabola con asse orizzontale e vertice nel punto nell'origine degli assi; per $x \ge 1/e$ abbiamo una semiretta con coefficiente angolare 2/3 che parte dal punto (e^{-1}, e^{-1}). Studiamo allora $f(x)$ per $x \in [0, 1/e]$. Da un noto limite fondamentale segue che $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Inoltre $\lim_{x\to e^{-1}-} f(x) = 1/e$, per cui f è continua in $\mathbb{R}$. Per $0 < x < 1/e$, f è derivabile e si ha

$$f'(x) = -\frac{3\log x + 1}{3\sqrt[3]{(\log x)^2}} \qquad \text{se } 0 < x < 1/e$$

Poiché $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$ si deduce che f non è derivabile in $x = 0$, mentre dal fatto che $\lim_{x\to e^{-1}-} f'(x) = 2/3$ segue che esiste $f'(e^{-1}) = 2/3$. Si ha

$$\text{per } 0 < x < 1/e: \qquad f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \log x < -1/3 \Longleftrightarrow x < e^{-1/3}$$

quindi, essendo $e^{-1} < e^{-1/3}$, f è crescente sull'intervallo $[0, e^{-1}]$. Si ha poi

$$f''(x) = \frac{15 \log x + 2}{9x \sqrt[3]{|\log x|^5}} \qquad \text{se } 0 < x < 1/e$$

da cui $f''(x) > 0$ se e solo se $x > e^{-15/4} (> e^{-1})$, per cui f è concava su $[0, e^{-1}]$. Il punto $x = 0$ è l'unico punto di minimo di f ed è punto di minimo assoluto: il minimo è zero. f non ha massimo essendo $\sup f = +\infty$.

4. Si tratta di una forma indeterminata 0/0 per cui applicando il Teorema di De L'Hopital ed il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale si trova che il limite richiesto è uguale a

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\sin x - x \cos x}{x^3}\right)} = 3.$$

5.
   - (i) f è continua e negativa in [0,1). Possiamo riscriverla come

     $$f(x) = -\frac{x}{|x-1|^{4/3}|x-2|^{3/7}} \approx -\frac{1}{|x-1|^{4/3}}$$

     per $x \to 1-$. Ora dato che $4/3 > 1$ in base al criterio asintotico deduciamo che l'integrale generalizzato non converge.
   - (ii)(solo MatApp) in $[3, +\infty)$ f è continua e positiva e , ragionando come sopra, si comporta per $x \to \infty$ come segue

     $$f(x) = \frac{x}{|x-1|^{4/3}|x-2|^{3/7}} \approx \frac{x}{|x|^{4/3}|x|^{3/7}} = \frac{1}{x^{4/3+3/7-1}} = \frac{1}{x^{16/21}}\,.$$

     Ora l'integrale

     $$\int_3^\infty \frac{1}{x^{16/21}} dx$$

     diverge perchè $16/21 < 1$.