# Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

*Prof. S. De Marchi, Dott. V. Recupero*

`Verona, 20 aprile 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+x} \right)^{n^2} \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos(x^3) - e^{x^3})}{\log^3(1-x) - x^3}.$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne un grafico approssimativo:
$$f(x) := \begin{cases} \arctan|x-2| - \dfrac{\pi}{4|x-2|} & \text{se } |x-2| \geq 1 \\ \dfrac{2+\pi}{4} \log|x-2| & \text{se } 0 < |x-2| < 1 \end{cases}$$
In particolare è richiesto uno studio dettagliato della derivabilità di $f$. (arctan denota la funzione arcotangente).

4. Stabilire per quali $n \in \mathbb{N}$ converge
$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2-1)^3} \, dx \, .$$
Calcolarlo quindi per il più grande di detti $n$.

`Tempo:` 2 ore .

## Soluzioni

1. Applicando il criterio della radice, applicabile quando $x > -n$, $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+x}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \to \mathrm{e}^{-x}$. Da cui, quando $x > 0$ converge. Per $x < 0$ diverge e infine per $x = 0$ la serie ha termini costantemente uguali ad 1 e quindi diverge.

2. Per $x \to 0$ si ha
$$\frac{x(\cos(x^3) - e^{x^3})}{\log^3(1-x) - x^3} = \frac{x\left(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6) - 1 - x^3 + o(x^3)\right)}{\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 - x^3}$$
$$= \frac{-x^4 + o(x^4)}{-2x^3 + o(x^3)} \to 0.$$

3. Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse $x = 2$. Per cui, volendo, è sufficiente studiare la funzione
$$g(y) := \begin{cases} \arctan y - \frac{\pi}{4y} & \text{se } y \geq 1 \\ \frac{2+\pi}{4}\log y & \text{se } 0 < y < 1 \end{cases}$$
Si ha $g(1) = 0$ da cui segue che $g \in C(0, +\infty)$. Inoltre $g(y) \to \pi/2$ per $y \to +\infty$ e $g(y) \to -\infty$ per $y \to 0^+$. La funzione $g$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$ perché somma di funzioni strettamente crescenti, altrimenti si può studiare la derivata
$$g'(y) = \frac{1}{1+y^2} + \frac{\pi}{4y^2} = \frac{(4+\pi)y^2 + \pi}{4(1+y^2)y^2} \qquad y > 1.$$
Da qui si può dedurre che esiste $g'(1) = (2+\pi)/4$. Si ha infine
$$g''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} - \frac{\pi}{2y^3} = \frac{-4y^4 - \pi(1+y^2)^2}{2(1+y^2)^2y^3} \qquad y > 1$$
da cui segue che $g''(y) < 0$ per ogni $y > 1$. Non esiste la derivata seconda nel punto $x = 1$ in quanto $g'(0+) = -(1+\pi)/2$ e $g'(0-) = -(2+\pi)/4$.

4. Per $n = 0, 1$, $I_n$ si comporta asintoticamente come $1/x^5$ e $1/x^3$, rispettivamente e quindi converge. Per $n = 2$ il comportamento è quello di $1/x$ che diverge. Quindi $n \leq 1$.
Per $n = 1$ l'integrale diventa $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)^3}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^3 dx$. Ponendo $t = x^2 - 1$, $x = \sqrt{t+1}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ da cui gli estremi diventano $t = 3$ e $t = b^2 - 1$. Fatta questa sostituzione ci si riconduce a calcolare l'integrale $\lim_{b\to+\infty} \int_3^{b^2-1} \frac{t+1}{2t^3}dt$ che si integra agevolvolmente (separandolo in due integrali con funzione integranda $1/(2t^2)$ e $1/2t^3$, rispettivamente) ottenendo come risultato finale $7/36$.