Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi, Dott. V. Recupero e Dott. M. Caliari

`Verona, 26 settembre 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Inoltre indicare le sigle **IM** o **MA** a seconda se Informatici Multidiali o Matematici Applicati.

1. A partire da $x_0 \in (0, \pi)$ si consideri la successione $x_{k+1} = x_k + \sin x_k,\ k \geq 0$. Dimostrare che

   (i) $x_k \in (0, \pi),\ \forall k$;

   (ii) $\{x_k\}$ è crescente.

   Infine calcolare $\lim_{k \to \infty} x_k$.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   (a) f è continua in $x = 0$?

   (b) f è derivabile in $x = 0$?

   (c) $f'(x)$ è continua su $\mathbb{R}$?

3. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2e^{\sin x} + \cos^2 x - 3)^5}{\sin^4 x}$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x| \log x}{1 + x} \quad [\log = \ln = \log_e]$$

   (in particolare massimi e minimi e convessità) e tracciarne un grafico qualitativo.

5. (*solo MatApp*)

   Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{1/x} 3 \sin^2 t \, dt}{\displaystyle\frac{1}{x^3}}$.

`Tempo:` 2 ore per Informatici Multimediali e di 2,5 ore per i Matematici Applicati.

Soluzioni

1. (i)Sia $x_0 \in (0,\pi)$ e $x_{k+1} := x_k + \sin x_k$ per ogni $k \geq 0$. (i): la funzione $f(x) := x + \sin x$ è positiva in $(0,\pi)$ ed ha come massimo il valore π raggiunto esattamente nei punti del tipo $x = \pi + 2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, quindi se $x_0 \in (0,\pi)$ allora dev'essere $x_1 = x_0 + \sin x_0 \in (0,\pi)$. Per induzione si ottiene allo stesso modo che $x_k \in (0,\pi)$ per ogni $k \geq 0$.

   (ii) Poiché per (i) $x_k \in (0,\pi)$, sappiamo che $\sin(x_k) \in (0,1]$, allora $x_{k+1} \leq x_k$, $\forall k \geq 0$. Infine essendo $\{x_k\}$ crescente, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sup\{x_k\} = \pi$. (alternativamente: essendo x_k crescente e $x_1 > 0$ esiste $\lim_k x_k = \ell \in (0,\pi]$; se fosse $0 < \ell < \pi$ si avrebbe passando al limite nella relazione ricorsiva che $0 = \sin \ell$, assurdo, quindi $\ell = \pi$.)

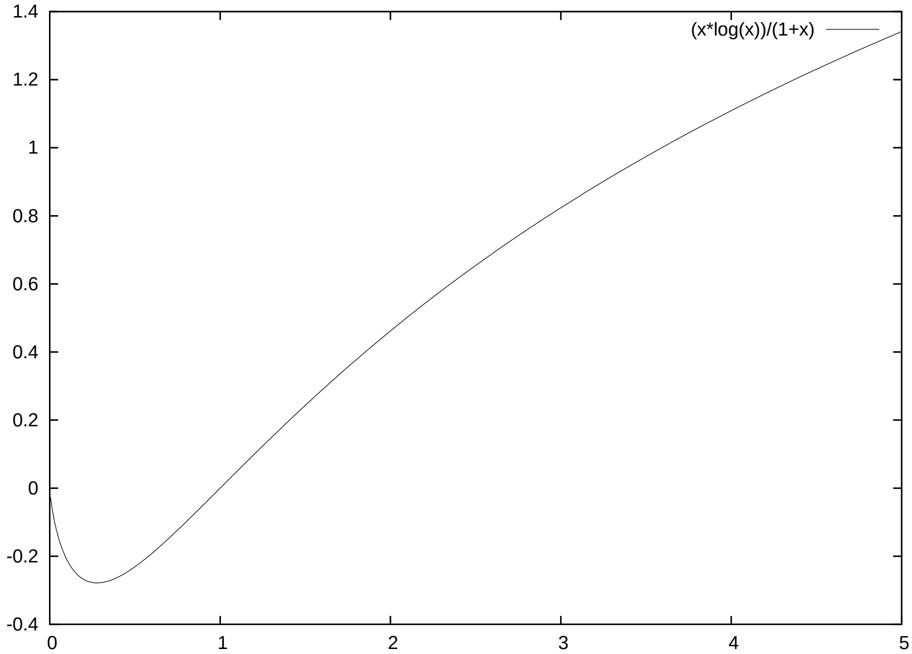
2. (a) Si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ovvero f è continua in $x = 0$.

   (b)
   $$f'(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}(1-\cos x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   per $x \neq 0$. Ora calcoliamo
   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)\sin(1/h)}{h} = 0\,.$$
   Pertanto $f'(0) = 0$.

   (c) Facilmente si controlla che $\lim_{h\to 0} f'(x)$ non esiste. Quindi f' non è continua in $x = 0$ e quindi non lo è su $\mathbb{R}$.

3. Sviluppare in $\sin x$:
   $$= \lim_{x\to 0}\frac{(2+2\sin x+\sin^2 x+o(\sin^2 x)+1-\sin^2 x-3)^5}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x)^5}{\sin^4 x} = 0$$

4. (traccia): Dominio: $x > 0$, dunque si può togliere il modulo. $f(1) = 0$, $f(0^+) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$. $f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$. $f'(x) = (1+x+\log x)/(1+x)^2$: il numeratore si annulla in un punto tra 0 e 1, punto di minimo. $f''(x) = (-x+1/x-2\log x)/(1+x)^4$: si ha $f''(1) = 0$.



5. Si tratta di una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$" alla quale si può applicare il Teorema di De L'Hopital, per cui utilizzando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e la regola di derivazione di funzioni composte, si trova

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{1/x} 3\sin^2 t\ dt}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{3}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)^2 = 1$$