Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi, Dott. M. Caliari

`Verona, 29 marzo 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left[\log(\mathrm{e}^4 + \frac{x}{n})\right]^n}{5^n + 3}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2\cos x + x^2 - 1)}{(\cos x - 1)^2 \sin \frac{1}{x}} \quad [\ln = \log = \log_e]$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{1/(1+x)}$$

   e tracciarne un grafico qualitativo. Lo studio della derivata seconda è facoltativo.

4. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})}$.

   (i) Studiarne il comportamento nell'origine e calcolarne la parte principale.

   (ii) Si studi la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx$, $\alpha > 0$.

`Tempo:` 2 ore .

Soluzioni

1. Intanto osserviamo che la serie è definita quando l'argomento del logaritmo è maggiore di zero, ovvero certamente quando $x > -n\mathrm{e}^4$. Usando il criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{\frac{n\left(\log(\mathrm{e}^4 + x/n)\right)^n}{5^n + 3}} = \log(\mathrm{e}^4 + x/n)\ \sqrt[n]{n}\ \frac{1}{\sqrt[n]{5^n + 3}}$$

   Ma $\lim_{n\to\infty} \log\left(\mathrm{e}^4 + x/n\right) = 4$, **indipendente da x**. Quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ lo studio della convergenza della serie non cambia.
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5^n + 3}} = 1/5.$
   In definitiva il limite della radice n-esima del termine generale della serie è $4/5 < 1$. La serie converge per il criterio della radice n-esima.

2. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2\cos x + x^2 - 1)}{(\cos x - 1)^2 \sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2\cos x + x^2 - 1)}{(\cos x - 1)^2 \sin\frac{1}{x}} \frac{2\cos x + x^2 - 1 - 1}{2\cos x + x^2 - 1 - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + x^2 - 2}{(\cos x - 1)^2 \sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 + 2\frac{x^4}{4!} + o(x^4) + x^2 - 2}{(\cos x - 1)^2 \sin\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^4}{4}\sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12}}{\frac{x^4}{4}\sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\sin\frac{1}{x}}$$

   limite che non esiste.

3. Dominio: $x \neq 1$. Positività: $x > 0$. Intersezioni: $(0,0)$. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. Asintoti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/(1+x)} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x}\frac{e^{1/(1+x)} - 1}{1/(1+x)} = 1$$

$$f'(x) = \frac{(1 + x + x^2)e^{1/(1+x)}}{(1+x)^2}$$

   sempre positiva, con $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 0$.

$$f''(x) = \frac{(-2 - 5x - 10x^2 - 12x^3 - 8x^4 - 2x^5)e^{1/(1+x)}}{(1+x)^6}$$

   con $f''(x) \geq 0$ per $x \leq -2$ (Ruffini).

4. (i) Per $x \to 0$ si ha $1 - \cos x \sim x^2/2$ e $\log(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x}$ ovvero $f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$. In conclusione $f(x)$ ha ordine di infinito $1/3$ per $x \to 0$ e la parte principale è $p(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$.

   (ii) Per la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^\alpha f(x)dx$, $\alpha > 0$, partendo da quanto appena osservato, ovvero che per $x \to 0$ $f(x) \sim p(x)$, sapendo che $\int_0^\alpha p(x)dx$ converge concludiamo che anche $\int_0^\alpha f(x)dx$ converge.