Esame di ANALISI MATEMATICA I

A.A. 2005-2006

Prof. S. De Marchi, Dott. V. Recupero e Dott. M. Caliari

`Verona, 5 settembre 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Inoltre indicare le sigle **IM** o **MA** a seconda se Informatici Multidiali o Matematici Applicati.

1. Determinare se la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

converge o diverge.

(Solo per matematici applicati): Stessa domanda per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 + n^s + \arctan n) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

al variare di $s \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^{\frac{3}{2}}} + x - x^{\frac{3}{2}} - \sin x - \cos x^2}{\tan^3 x}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \log|\log(x^2 - 1)|$$

e tracciarne un grafico qualitativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

4. Determinare tutti i valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(5 + 16x)^{\beta+1} x^{\alpha}} dx\,.$$

(Solo per matematici applicati): Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(5 + 16x)\sqrt{x}} dx\,.$

`Tempo:` 2 ore per Informatici Multimediali e di 2,5 ore per i Matematici Applicati.

Soluzioni

1. La serie è a termini positivi. Ricordando che $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ e quindi asintoticamente

$$n^3 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim n^3 \left(\frac{1}{2n^2}\right)^2 \sim \frac{1}{4n}\,.$$

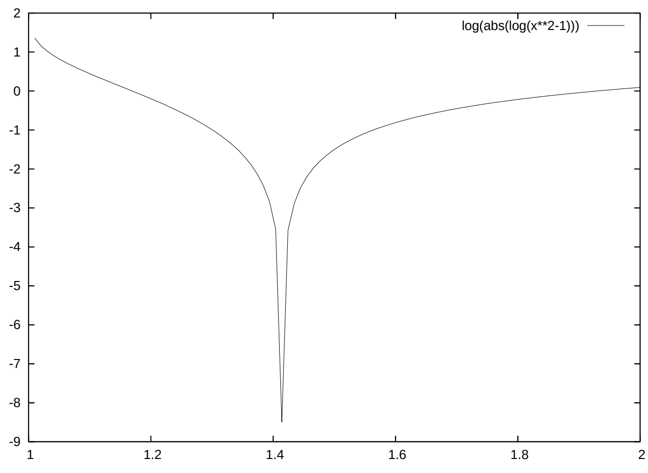
La serie si comporta asintoticamente come la serie armonica con $\alpha = 1$, che diverge. Pertanto la serie data, in base al criterio asintotico, diverge.

Per M.A. Se $s < 3$, $(n^3 + n^s + \arctan n) \sim n^3$ per cui la serie si comporta come quella data in precedenza: diverge.
Se $s = 3$, $(n^3 + n^s + \arctan n) \sim 2n^3$, quindi anche in questo caso diverge.
Infine se $s > 3$ allora $(n^3 + n^s + \arctan n) \sim n^s$, quindi la serie si comporta asintoticamente come la serie armonica con $\alpha = 4 - s$, per cui converge se e solo se $4 - s > 3$ che non è mai vero per $s > 3$, quindi anche in quest'ultimo caso la serie diverge.

2.

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^{\frac{3}{2}} + x^3/2 + o(x^3) + x - x^{\frac{3}{2}} - x + x^3/6 + o(x^3) - 1 + x^4/2 + o(x^4)}{x^3} = \frac{2}{3}$$

3. (traccia): funzione pari, si può studiare a dx. Dominio $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $\log(x^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq \sqrt{2}$. Intersezioni: $f(x) = 0 \Rightarrow \log(x^2 - 1) = \pm 1 \Rightarrow x = \sqrt{e^{\pm 1} + 1}$. Segno: $f(x) \geq 0$ per $x \leq \sqrt{e^{-1} + 1}$ e $x \geq \sqrt{e + 1}$. Limiti: $f(1^+) = +\infty$, $f(\sqrt{2}) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{\log(x^2-1)} \frac{2x}{x^2-1}$ (bisogna stare attenti al modulo). Massimi e minimi: $f'(x) \geq 0$ per $x > \sqrt{2}$, dunque nessun massimo o minimo relativo.



4. Per $x \to 0^+$ si ha
$$\frac{1}{(5+16x)^{\beta+1}x^\alpha} \sim \frac{1}{5^{\beta+1}x^\alpha}$$
pertanto l'integrale converge a dx di 0 se e solo se $\alpha < 1$.

   Per $x \to +\infty$ si ha
$$\frac{1}{(5+16x)^{\beta+1}x^\alpha} \sim \frac{1}{16^{\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}}$$
e qui si ha convergenza dell'integrale se e solo se $\alpha + \beta + 1 > 1$ ovvero se $\alpha > -\beta$.

   Riassumendo, globalmente l'integrale converge se $\alpha < 1$ e $\alpha > -\beta$.

   Per M.A..
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(5+16x)\sqrt{x}}dx &= \int_0^\infty \frac{2t}{t(5+16t^2)}dt = 2\lim_{z\to+\infty}\int_0^z \frac{1}{5+16t^2}dt \\ &= 2\lim_{z\to+\infty}[\frac{1}{4\sqrt{5}}\arctan\frac{4t}{\sqrt{5}}] = \frac{1}{2\sqrt{5}}\lim_{z\to+\infty}\arctan\frac{4z}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.\end{aligned}$$