Diario delle lezioni di Analisi Matematica I
A.A. 2005-2006

De Marchi Stefano*

May 11, 2006

24 ott. 2005.

- definizione di funzione, dominio e codominio
- grafico di una funzione
- funzioni particolari: a tratti (tra cui la potenza troncata $(x-c)_+^k$); a gradino; funzione parte intera;
- funzioni simmetriche, pari e dispari;
- funzioni monotone in senso stretto e non. Monotone significa crescenti o decrescenti ovvero per ogni $x_1, x_2 \in dom(f)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ (in caso decrescente si inverte il $\geq$.

28 ott. 2005. funzioni elementari e in particolare:

- funzione traslazioni: $t_c(x) = x + c,\ c \neq 0$;
- dilatazioni o cambiamento di scala: $s_c(x) = cx,\ c > 0$. Esempio della funzione di Heaviside.
- funzioni pari: $f(x) = f(-x)$; e dispari $f(x) = -f(-x)$; riflessioni $f(|x|)$ e $|f(x)|$.
- funzioni periodiche: $f(x \pm p) = f(x),\ \forall x \in dom(f)$, con p periodo. Ogni funzione periodica di perido p è periodica di periodo mp, $\forall m \in I\!N$.
- funzione elevamento potenza: x^α $\alpha \in I\!R$, distinguendo i casi α intero, razionale e irrazionale.
- funzioni polinomiali e funzioni razionali.

2 nov. 2005.

- funzione esponenziale: $y = a^x$, $a > 0$ e sue proprietà ($a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{x-y} = a^x/a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$);
- funzione logaritmo a base a.
- funzione e^x e $\log_e(x)$.
- funzioni trigonometriche e loro inverse. In particolare si sono studiate $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e le loro inverse $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$. Accenni anche alle funzioni reciproche secante, cosecante, cotangente.

*Dipartimento di Informatica, Università di Verona, Italia

- Definizione di intorno aperto e chiuso di un punto $x_0 < +\infty$ o $x_0 > -\infty$ e di intorno di ∞. Definzione di limite di una successione numerica.

4 nov. 2005. Calcolo di limiti di successione numeriche. In particolare ci si è soffermati su successioni convergenti, ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ con l finito, e successioni divergenti tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

- Calcolo di $\lim_{n\to\infty} a_n$ con $a_n = \sum_{k=0}^{n} k$ che ha consentito di provare che che $a_n = n(n+1)/2$.
- Si è data la condizione sufficiente di convergenza o divergenza di successioni monotone e limitate: successioni monotone crescenti e superiormente limitate convergono ovvero
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \sup\{a_n : n \in I\!N\} .$$
Se decrescenti e inferiormente limite allora convergono
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \inf\{a_n : n \in I\!N\} .$$
Tali limiti sono infiniti se le successioni non sono limitate.
- In particolare si è dimostrato che la successione
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
è monotona crescente, $2 < a_n < 3$ ed ha limite che vale e, numero di Nepero. Anzi e lo si può proprio definire come tale limite.
- Si è anche studiata una successione definita per *ricorrenza*, cioè la successione $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 3 + 1/2a_n$, $n \geq 1$ provando che è monotona crescente ed ha limite il numero 6.

7 nov. 2005. Lezione sui numeri complessi. In particolare si è identificato $\mathbb{C} = I\!R \times I\!R$ e quindi ogni $z \in \mathbb{C}$ si scrive con coppie ordinate di reali. Anche se $\mathbb{C}$ non è un insieme ordinato. Lo zero è $(0,0)$, l'unità $(1,0)$ mentre $(0,1)$ è l'unità immaginaria. Si sono definite le operazioni di somma e prodotto come segue: dati $z = (x,y)$ e $z' = (x',y')$
$$z + z' = (x + x', y + y'), \quad zz' = (xx' - yy', xy' + x'y) .$$
Da cui $i = (0,1)$ è tale che $i^2 = (-1,0) = -1$. Poichè $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$ sono numeri reali, possiamo anche scrivere $z = x+iy$. Si sono poi introdotte le operazioni:

- coniugazione: $\bar{z} = x - iy$; in particolare $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in I\!R$ è detto *norma* di z.
- modulo: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, che è la distanza euclidea. Si sono poi discusse alcune delle proprietà del modulo e in particolare la *disuguaglianza triangolare* ($|u + v| \leq |u| + |v|,\ u, v \in \mathbb{C}$).

- Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi:

$$z = q(\cos\phi + i\sin\phi), \quad q = |z|$$

ϕ è chiamato *anomalia* di z. Si è provato che $zz' = qq'(\cos(\phi+\phi')+i\sin(\phi+\phi'))$.

- Formula di *De Moivre*:

$$z^n = q^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) \; .$$

e sue applicazioni al calcolo di $\cos k\phi$ a partire da $\cos\phi$.

- Radici $n$esime di numeri complessi. Dati $w, z \in \mathbb{C}$ si dice che w è una sua radice n-esima se $z = w^n$, $n \geq 1$. In particolare si ha che

$$w_k = q(\cos(\frac{\phi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, ..., n-1$$

sono le radici n-esime di $z \neq 0$. Il numero 0 ha la sola radice $n$esima che vale sempre 0. Si è data anche l'interpretazione geometrica delle radici come punti equispaziati su una circonferenza di raggio q.
Infine nel caso $z = 1$ le radici $n$esime dell'unità sono

$$e_k = \cos(\frac{\phi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, ..., n-1 \; .$$

11 nov. 2005. Limiti e continuità. Si è data la definizione di continiutà di una funzione f in un punto x_0 nel seguente modo.

Definizione 1. *Sia $x_0 \in D$, D=dom(f). f è continua in x_0 se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.*

$$\forall x \in D, \; x \in I_\delta(x_0) \;\longrightarrow f(x) \in I_\epsilon(f(x_0)) \, .$$

Definizione 2. *Sia f definita in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Si dice che f ha limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ e scriveremo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.*

$$\forall x \in dom(f), \; x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \;\longrightarrow f(x) \in I_\epsilon(l) \, .$$

Dalle due precedenti definizioni segue che

f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si è introdotto il concetto di *punto di discontinuità elimininabile.*

Definizione 3. *Sia f definita in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Se f ha limite per $x \to x_0$ e verifica una delle due condizioni*

- *f definita in x_0 e $f(x_0) \neq l$.*
- *f non è definita in x_0*

allora x_0 è detto punto di discontinuità eliminabile per f.

Come esempio tipico consideriamo $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Essa non è definita in 0, ma la possiamo *prolungare per continuità* definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Si sono poi fatti altri esempi di funzioni continue su $\mathbb{R}$ o su sottinsiemi proprio di $\mathbb{R}$. In particolare si è dimostrata la continità del sin mostrando dapprima che $|\sin(x)| \leq |x|$ (uguaglianza solo per $x = 0$). Quindi usando le formule di prostaferesi

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2\sin((x - x_0)/2)\cos((x + x_0)/2)$$

si può dire che

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2\frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1$$

e ricorrendo alla definizione di continuità in un punto di una funzione, si conclude.

Si sono quindi introdotti i concetti di limite sinistro e destro in un punto x_0 e di continiutà a sinistra e a destra per funzioni definite in intorni sinistri e destri di x_0.

Definizione 4. *Sia f definita in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Si dice che f è continua da destra in x_0 e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,.$$

Analogamente per la continiutà da sinistra e scriveremo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$

Come conseguenza, una funzione ha limite in x_0 se e solo se esistono limite sinistro e destro e coincidono.

Altra definizione

Definizione 5. *Sia f definita in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Se f ha per $x \to x_0$ limiti sinistro e destro finiti ma diversi, allora x_0 è detto un punto* **discontinuità di prima specie o salto** *per f.*

Definiamo quindi il *salto di f in x_0*

$$s_f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)\ .$$

Esempio: sia $f(x) = sign(x)$, allora $s_{sign}(0) = 2$; $f(x) = [x]$ allora $s_{[x]}(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Infine

Definizione 6. *Se non esiste il limite di f per $x \to x_0$, cioè non ci sono nè il limite sinistro nè quello destro, allora x_0 è detto un punto* **discontinuità di seconda specie** *per f.*

Esempio: $f(x) = \sin(1/x)$ ha una discontinuità di seconda specie in $x = 0$.

14 nov. 2005. Alcuni teoremi fondamentali sui limiti.

Teorema 1. *(***della permanenza del segno***).*

Se f ha limite l per $x \to x_0$. Se $l > 0$ oppure $l = +\infty$, allora esiste un intorno di x_0 in cui $f > 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ (analogamente per $l < 0$).

Dim. Nel caso finito, supponiamo $l > 0$. Consideriamo $I_\epsilon(l)$ con $\epsilon = l/2 > 0$. Dalla deinizione di limite segue che esiste un intorno di $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha che $f(x) \in I_\epsilon(l) = (\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}) \subset (0, \infty)$. Allora f assume valori positivi.

Se $l = +\infty$, prenderemo $I_A(\infty) = (A, +\infty)$ con $A > 0$ e usando la definizione di limite si conclude. $\square$

Da cui, come corollario segue che

Corollario 1. *Se $f \geq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora* $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$ *oppure* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *(analogamente per $f \leq 0$).*

Teorema 2. *(***del confronto***).*

Se $f(x) \leq g(x)$ per x vicino a x_0, eccetto al più x_0. Se esistono i limiti

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x), \quad m = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora $l \leq m$.

Dim. Si fa ricorrendo al Teorema della permanenza del segno. In particolare poi se $l = +\infty$ e $m = -\infty$ non c'è niente da provare. $\square$.

Teorema 3. *(***dei 2 carabinieri***).*

Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ per x vicino a x_0, eccetto al più x_0. Se esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Come esempio di applicazione del Teorema (3) abbiamo calcolato

(a) $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$;

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Teorema 4. *(***del confronto nel caso infinito***). Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *e se esiste un intorno $I(x_0)$ su cui f e g sono definite (eccetto al più in x_0) dove $f(x) \leq g(x)$ per $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Allora* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$*. Analogamente nel caso $-\infty$.*

Si sono poi viste le regole sui limiti. Ipotesi di lavoro: f e g siano 2 funzioni che hanno limite **finito** per $x \to x_0$.

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x), \;\; \forall c \in I\!R$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ nel caso in cui $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$;

Si è poi parlato della cosidetta *Algebra dei limiti* discutendo della forme determinate e **indeterminate**. Sono indeterminate le forme:

$$\pm\infty + \mp\infty, \;\; (\pm\infty) - (\pm\infty), \;\; (\pm\infty)\cdot 0 \;\; \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}, \;\; \frac{0}{0}, \;\; 0^{\pm\infty}, \;\; (\pm\infty)^0.$$

Nel caso di forme indeterminate a priori non possiamo stabilire qual è il limite: dobbiamo studiarlo di volta in volta con degli `accorgimenti`.

Ad esempio, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ che per $x \to 0$ porta ad una forma indeterminata del tipo $0/0$, si può calcolare usando il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}\,.$$

Si sono fatti diversi altri esempi di limiti che portano a forme indeterminate ma risolvibili. Uno tra tutti $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$ che è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Ma portando fuori dal segno di radice $|x|$ si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x}}} = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \to \infty \\ -\frac{1}{3} & x \to -\infty \end{cases}\,.$$

18 nov. 2005.

Teorema 5. **(di sostituzione**). *Supponiamo esista il* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *(finito o infinito). Sia g una funzione definita in un intorno $I(l)$ escluso a più l e sia tale che*

sia l finito e g continua in l;

- *se $l = \pm\infty$ esiste finito* $\lim_{y\to l} g(y)$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)\,.$$

Conseguenza nel caso in cui $l \in I\!R$ e g continua in l, cioè $\lim_{y\to l} g(y) = g(l)$:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

si dice che **g commuta col simbolo di limite**.

Corollario 2. *Se f è continua in x_0 e sia $y_0 = f(x_0)$. Sia g definita in un intorno di y_0 e continua in $y0$. Allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Si sono fatti alcuni esempi di limiti che si calcolano usando il Teorema di sostituzione e del successivo corollario. Ad esempio:

$$\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Il teorema di sostituzione si estende la caso di successioni di funzioni. Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ abbia limite l finito. Allora se g continua

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{y\to l} g(y)$$

Questa proprietà si usa spesso quando si vuole dimostrare che una funzione non ha limite. Infatti, se le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ hanno entrambe limite l e

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(b_n)$$

allora non esiste il limite per $y \to l$.

Come esempio si è considerato $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ che non esiste. Infatti prese le successioni $a_n = 2\pi n$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(b_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \ .$$

Limiti notevoli

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. Di questo limite si è fatta la dimostrazione che usa il limite fondamentale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, provando che il limite è lo stesso sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Come applicazione, si è anche studiato il caso di funzioni $h(x) = (f(x))^{g(x)}$, i cui limiti si studiano passando alla forma $h(x) = \exp(g(x)\log(f(x)))$. In particolare si sono determinati $\lim_{n\to 0^+} x^x = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)$, che nel caso in cui $a = e$ si ottiene $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = \log_e(e) = 1$.

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e(a)$, che nel caso $a = e$ diventa $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

21 nov. 2005. Si sono presentati alcuni dei teoremi che caratterizzano le cosidette proprietà globali delle funzioni continue.

Teorema 6. *(***zeri di funzioni continue***). Sia $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, ovvero assume valori di segno opposto agli estremi a e b, allora esiste uno zero di f in (a,b). Se inoltre f è strettamente monotona in $[a,b]$ allora lo zero è unico in (a,b).*

Dim. (Solo alcune idee). La dimostrazione costruttiva si basa sul **metodo di bisezione** ed è stata fatta costruendo, nell'ipotesi in cui $f(a) < 0 < f(b)$, due successioni $\{a_n\}_{n\geq 0}$ monotona crescente e $\{b_n\}_{n\geq 0}$ monotona decrescente, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, con $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots b_0$. Vista la monotonia delle successioni essere convergono da sx e da dx ad un punto x_0 poichè

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0^-\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0^+$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} x_0^+ - x_0^- = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0\,.$$

Sfruttando la continuità di f si verifica che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$. Quindi dal teorema del confronto si deduce che $f(x_0) = 0$.

Infine nel caso in cui f è strettamente crescente o decrescente, è iniettiva e quindi lo zero è unico. $\Box$.

Alcune conseguenze del Teorema

Corollario 3. *Sia $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e si supponga che esistano finiti o infiniti, diversi da zero e di segno opposto i limiti agli estremi a e b di f. Allora f ha uno zero in (a,b) che è unico se f è strettamente monotona.*

Come esempio si è considerata la funzione $f(x) = x + \log(x)$ che è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e ha $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Corollario 4. *Siano $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ allora esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = g(\xi)$.*

Dim. Considerata la funzione continua $h(x) = f(x) - g(x)$ si applica il Corollario 3. $\Box$.

Osservazione. Il Corollario 4 è alla base della costruzione di metodi di iterazione funzionale per il calcolo numerico di zeri di funzione. Ad esempio per calcolare l'unica soluzione di $\cos(x) = x$ in $(0,1)$ si sfrutta proprio detto corollario per dimostrarne l'esistenza. Quindi il calcolo si farà con metodi numerici.

Teorema 7. (**dei valori intermedi**). *Sia $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Questo teorema si dimostra applicando il Corollario 4 quando una delle due funzioni è considerata una funzione costante. Il teorema è alla base dei pacchetti di computer-graphics per il disegno.

21 nov. 2005. La prima parte della lezione è stata dedicata ancora alle proprietà delle funzioni continue. In particolare si è dimostrato il seguente corollario

Corollario 5. *Sia $f \in \mathcal{C}(I)$, I intervallo di $I\!R$. Allora $Im\, f(I) = [\inf_I(f), \sup_I(f)]$.*

Dim. Siano $y_1 < y_2 \in f(I)$. Allora in I esistono $x_1 \neq x_2$ t.c. $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Sia $J = [x_1, x_2] \subseteq I$. Applicando il Teorema dei valori intermedi alla f_J si ha $[y_1, y_2] \subseteq f(J) \subseteq f(I)$. Quindi $f(I)$ è un intervallo di estremi $\inf_I(f)$ e $\sup_I(f)$. $\Box$.

Nota: se I è aperto o semiaperto, $Im\, f(I)$ può essere chiuso, aperto, semiaperto illimitato. Ad esempio, $f(x) = \sin(x)$ si $I = (0, 2\pi)$ ha come immagine l'intervallo chiuso $[-1, 1]$; mentre $f(x) = \tan(x)$ mappa $I = (-\pi/2, \pi/2)$ in $(-\infty, +\infty)$.

Se però I è chiuso e limitato vale il seguente **Teorema di Weierstass**.

Teorema 8. *Sia $f \in \mathcal{C}([a,b])$, con $[a,b]$ chiuso e limitato. Allora*

$$f([a,b]) = [m, M], \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Dim. omessa.

Teorema 9. *Sia $f \in \mathcal{C}(I)$, con I intervallo. Allora f è iniettiva se e solo se è strettamente monontona su I.*

Teorema 10. *Sia $f \in \mathcal{C}(I)$ e invertibile, con I intervallo. Allora f^{-1} è continua su $J = f(I)$.*

Conseguenze dell'ultimo teorema: le funzioni $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$ e $y = \arctan(x)$ sono continue nel loro dominio come pure $y = \log_a(x)$ su $I\!R_+$.

23 nov. 2005. "o piccolo" e "o grande" (simboli di Landau)

Supponiamo che esista finito o infinito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{1}$$

con $g(x_0) \neq 0$.

Definizione 7. *Sia in (1) l finito si dice che f è "o grande" di g per $x \to x_0$ e si scrive*

$$f = \mathcal{O}(g), \quad x \to x_0$$

Inoltre

- *l finito e $\neq 0$, allora si dice che f è* **equigrande** *a g e si indicherà con*

$$f \approx g, \quad x \to x_0$$

in particolare quando $l =$, allora si dice che f è **equivalente** *a g e lo indicheremo con*

$$f \sim g, \quad x \to x_0$$

- *$l = 0$ allora f è* **trascurabile** *rispetto a g per $x \to x_0$ e si scrive*

$$f = o(g)$$

e si legge f è o piccolo di g.

Osservazione: in pratica dire che $f = \mathcal{O}(g)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che esiste una costante $C > 0$ e un intorno $I(x_0)$ tale che

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \ \ \forall\, x \in I(x_0), \ x \neq x_0 \, .$$

Esempi

(a) $\sin(x) \sim x$, per $x \to 0$: infatti $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) $\sin(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$: infatti $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

(c) $\sin(x) = o(\tan(x))$ per $x \to \frac{\pi}{2}$: infatti $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$.

(d) $\cos(x) \approx 2x - \pi$ per $x \to \frac{\pi}{2}$: infatti

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{2t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{2t} = -\frac{1}{2}.$$

Alcune proprietá:

(a) $f \approx g \ \ \Rightarrow \ \ f = \mathcal{O}(g); f \sim g \ \ \Rightarrow \ \ f = \mathcal{O}(g); f = o(g) \ \ \Rightarrow \ \ f = \mathcal{O}(g)$;

(b) $f \sim g \ \ \Rightarrow \ \ f = g + o(g)$.

(c) $\forall\, \lambda \in I\!R \backslash \{0\}$, $o(\lambda\, f) = o(f)$ e $\lambda o(f) = o(f)$.

(d) Dire che $f = o(1)$ significa dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, cioè f è infinitesima.

(e) Dire che $f = \mathcal{O}(1)$ significa che f è limitata in un intorno di x_0 (basta usare l'osservazione precedente).

(f) f continua in x_0 implica che $f(x) = f(x_0) + o(1)$. Infatti dalla definzione di continuità, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0) = 0 \iff f(x) - f(x_0) = o(1)$ per $x \to x_0$.

Si sono poi date alcune regole di calcolo con i simboli di "o piccolo" da cui si sono ottenute le seguenti importanti relazioni.

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$;
- $1 - \cos(x) \approx x^2$ per $x \to 0$ e in effetti $1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$;
- $\log(1 + x) \sim x$ o equivalentemente $\log(x) \sim x - 1$ per $x \to 1$;
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$;
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ per $x \to 0$.

Teorema 11. *Se $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$ per $x \to x_0$ allora:*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.

Dim. fatta in aula ma qui omessa. $\square$

Corollario 6. *Se $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g)$ per $x \to x_0$ allora*

(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + f_1(x))(g(x) + g_1(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x))$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dim. fatta in aula ma qui omessa. $\square$

Nota bene: le regole sin qui viste NON si applicano nel caso di limiti di somme o differenze di funzioni. Cioè se $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$ per $x \to x_0$ non è sempre vero che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) \pm \tilde{g}(x) \; .$$

Ad esempio: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} = 1$, ma se usassimo l'approssimazione $\sqrt{x^2 + 2x} \sim x$ per $x \to \infty$ il risultato del limite sarebbe 0 e quindi errato!

28 nov. 2005. In questa lezione si sono studiati gli infinitesimi e gli infiniti. In particolare il concetto di ordine di infinitesimo di una funzione f per $x \to x_0$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x - x_0$ (o in generale $\varphi(x) = |x - x_0|$). Nel caso che la funzione f sia infinita per $x \to x_0$ si usa come "campione" $\varphi(x) = 1/(x - x_0)$.

Definizione 8. *Sia f un infinitesimo (o un infinito) per $x \to x_0$. Se esiste un $\alpha \in I\!R_+$ tale che*

$$f \approx \varphi^\alpha, \quad x \to x_0$$

allora α si dice ordine di infinitesimo (infinito) di f rispetto all'infinitesimo (infinito) campione φ.

In particolare, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)} = l, \quad l \neq 0$$

ovvero $f \sim l\varphi^\alpha$ o $f = l\varphi^\alpha + o(l\varphi^\alpha)$ che si può anche scrivere come

$$f = l\varphi^\alpha + o(\varphi^\alpha) \; .$$

Definizione 9. *La funzione* $p(x) = l\varphi^\alpha$ *, si chiama la* **parte principale** *dell'infinitesimo (infinito)* f *in* x_0 *rispetto a quella funzione campione.*

Alcuni esempi.

(a) $f(x) = \sin(x) - \tan(x) = \frac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{\cos(x)} \sim \frac{x(-1/2x^2)}{1} = -\frac{1}{2}x^3$ per $x \to 0$. Da cui f è un infinitesimo di ordine 3 rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$ e ha parte principale $p(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1}$ è infinitesima per $x \to \infty$ ed ha ordine di infinitesimo 1 rispetto a $\varphi(x) = 1/x$ e $p(x) = 2/x$.

(c) $f(x) = \log(x) - \log(2)$ per $x \to 2$ ha ordine di infinitesimo 1 rispetto $\varphi(x) = x-2$ e $p(x) = \frac{1}{2}(x-2)$.

Abbiamo anche notato che non è sempre possibile determinare un ordine di infinito di una funzione rispett ai campioni φ sopra descritti.

Ad esempio: $f(x) = e^{2x}$ per $x \to +\infty$ è tale che $x^\alpha = o(e^{2x})$, $\forall \alpha > 0$ e quindi non è possibile determinare l'ordine di infinito. Ma se prendiamo $\varphi(x) = e^x$ allora la funzione data ha ordine di infinito 2.

Come applicazione abbiamo introdotto gli **asintoti** di una funzione. Consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) = 0 \,, \tag{2}$$

ovvero $f(x) = mx + q + o(1)$.

Definizione 10. *La funzione* $g(x) = mx + q$ *si chiama* `asintoto destro di f`. *Se* $m \neq 0$ *si dice asintoto obliquo, se* $m = 0$ *si dice asintoto orizzontale.*

I coefficienti m e q si determinano come segue.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx \,.$$

Naturalmente se i due precedenti limiti risultano finiti allora f ha asintoti obliqui (o orizzontali). Inoltre se $m \neq 0$ diremo che f è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$.

2 dic. 2005. Si è introdotta la definizione di funzione asintotica.

Definizione 11. *La funzione* f *è asintotica alla funzione* g *se*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \,.$$

In particolare dire che f ha asintoto la retta $mx+q$ equivale a dire che f è asintotica alla retta $g(x) = mx + q$. Si noti che non sempre vale il viceversa.

Ad esempio: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ non ha asintoto per $x \to +\infty$ ma $f(x) - x^2 = \frac{1}{x}$ è asintotica alla parabola x^2 sempre per $x \to +\infty$.

Nota bene: l'asintoto per $x \to -\infty$ si definisce allo stesso modo.

Definizione 12. *Se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo o orizzontale per f per $x \to \pm\infty$ allora la retta si dice* `asintoto completo`.

Definizione 13. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *allora la retta* $x = x_0$ *è un* **asintoto verticale** *per* f *in* x_0. *Se* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ *oppure* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *allora* $x = x_0$ *è asintoto verticale destro o sinistro, rispettivamente.*

Ulteriori proprietà delle successioni

I teoremi generali sui limiti di funzioni valgono anche per le successioni poichè si tratta di funzioni definite sui naturali a valori reali.

Solo una nota circa il seguente `Teorema di limitatezza` per successioni numeriche.

Teorema 12. *Se* $\{a_n\}_{n \geq 0}$ *è una successione convergente, allora essa è limitata.*

Dim. Sia $l \in I\!R$ il limite della successione. Allora per un fissato ϵ, es. $\epsilon = 1$, $\exists n_1 \geq n_0$ t.c. $|a_n - l| < \epsilon, \;\; \forall n > n_1$. Ma per tali n sappiamo che vale pure

$$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|\,.$$

Pertanto se prendiamo $M = \max\{|a_{n_0}, \ldots, |a_{n_1}|, 1+|l|\}$ allora avremo quanto richiesto cioè che $|a_n| \leq M, \;\; \forall n \geq n_0$. $\square$

Abbiamo quindi studiato la **successione geometrica** $a_n = q^n, \quad q \in I\!R$ fissato. Si è dimostrato che

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases} \tag{3}$$

In particolare questi risultati sulla `successione geometrica` si possono applicare a successioni del tipo

(a) $a_n = \sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$;

(b) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Abbiamo anche dimostrato un importante criterio per riconoscere quando una successione converge o meno, ovvero il **criterio del rapporto**.

Teorema 13. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione per cui* $a_n > 0$. *Se esiste finito o infinito*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

se

(i) $q < 1$ *allora* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ *(la successione è infinitesima);*

(i) $q > 1$ *allora* $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ *(la successione è divergente).*

Quale applicazione del criterio del rapporto abbiamo confrontato le seguenti successioni

$$\log(n);\ n^\alpha,\ \ q^n,\ \ n!,\ \ n^n,$$

con $\alpha > 0,\ q > 1$. Il risultato è che

$$log(n) = o(n^\alpha),\ n^\alpha = o(q^n),\ q^n = o(n!),\ n! = o(n^n)$$

ovvero quella che tende a infinito più rapidamente è appunto la successione $a_n = n^n$.

Si è conclusa la lezione con alcuni esercizi di calcolo di ordini di convergenza o divergenza di successioni, nonchè del calcolo di parti principali di successioni.

9 gen. 2006. Primo compitino.

13 gen. 2006. Serie numeriche parte I.

Definizione 14. *Data una successione $a_n, n \geq 0$, si consideri la successione $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, per ogni $n \geq 0$. La somma $\sum_{n=0}^\infty s_n = \sum_{k=0}^\infty a_k$ si chiama serie numerica.*

(a) se esiste finito $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, s è detta la somma della serie ovvero $s = \sum_{k=0}^\infty a_k$.

(b) se il limite esiste ed è infinito, la serie si dice che diverge.

(c) se il limite non esiste la serie si dice indeterminata.

Esempi. La serie $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}$ converge ed ha somma 2. La serie $\sum_{k=0}^\infty k$ diverge mentre la sere $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k$ è indeterminata perchè s_k assume il valore 1 quando $k = 2n+1$ (dispari) e 0 quando $k = 2n$ (pari).

Serie di Mengoli: $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{(k-1)k}$ la cui somma si è dimostrato essere uguale ad 1. La serie di Mengoli come la serie $\sum_{k=1}^\infty \log(1+\frac{1}{k})$ sono esempi di serie `telescopiche`. Cioè tali che $a_k = b_{k+1} - b_k$ per una opportuna $\{b_k\}_{k\geq 0}$. La particolarità è che $s_n = b_{n+1} - b_0$.

Teorema 14. *(Condizione necessaria) $\sum_{k=0}^\infty a_k$ converge se $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Teorema 15. *(Condizione sufficiente) Sia $r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^\infty a_k$ il residuo n-esimo. Se $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge allora $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$.*

Serie geometrica. $\sum_{k=0}^\infty q^k,\ \ q \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^\infty q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Ovviamente

$$\sum_{k=0}^\infty \alpha\, q^k = \frac{\alpha}{1-q}\,,\ \ se\ |q| \leq 1\,.$$

Teorema 16. Criterio del confronto per serie a termini positivi. *Date le serie a termini positivi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *con* $0 \leq a_k \leq b_k$. *Se*

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *converge allora* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge e* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
(b) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge allora* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *diverge.*

Esempi. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k^2+4k+3}$ converge perchè maggiorata dalla serie armonica generalizzata $\sum_{k=0}^{\infty} 5/2k^2$ che converge. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log k}{k}$ non converge perchè $\frac{\log k}{k} > \frac{1}{k}$, $k \geq 3$.

Teorema 17. Criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi. *Date le serie a termini positivi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *se* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c$ *(ovvero* $a_k \sim b_k$*) allora entrambe convergono o entrambe divergono.*

Esempio. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge perché converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ in base al criterio asintotico.

17 gen. 2006. Serie numeriche parte II.

Teorema 18. Criterio del rapporto per serie a termini positivi. *Data la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$. *Consideriamo il limite (anche infinito)*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l\,.$$

Se $l <\leq 1$ *la serie converge altrimenti diverge. Quando* $l = 1$ *non si può dire nulla (si discute caso per caso).*

Teorema 19. Criterio della radice per serie a termini positivi. *Data la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$. *Consideriamo il limite (anche infinito)*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l\,.$$

Se $l <\leq 1$ *la serie converge altrimenti diverge. Quando* $l = 1$ *non si può dire nulla (si discute caso per caso).*

Serie con termini di segno alterno: sono serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ove $a_k = (-1)^{k-1} b_k$ oppure $a_k = (-1)^k b_k$ con $b_k > 0$.

Teorema 20. Criterio di Leibniz per serie a segno alterno. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ *è tale che:*

(a) $b_{k+1} \leq b_k$ *(successione monotona decrescente);*
(b) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

allora la serie converge. Detta s *la sua somma, per ogni* $n \geq 0$ *si avrà*

$$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}, \quad s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}\,.$$

Serie con termini di segno qualsiasi. Assoluta convergenza ovvero la convergenza della serie dei valori assoluti.

Proposizione 1. *Se* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *converge allora* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.*

Per provare la convergenza assoluta si può usare il criterio del rapporto dei valori assoluti dei termini a_{k+1} e a_k.

20 gen. 2006. Derivate. Definizione ed esempi. Derivata come coefficiente angolare della retta tangente ad una curva in un punto, come limite della velocità media in un intervallo temporale e come limite del rapporto incrementale.

Proposizione 2. *Se* f *è derivabile in* x_0 *allora è continua in* x_0

Il contrario non è vero. Ad esempio: $f(x) = |x|$ che non è derivabile in $x = 0$.

Derivata di funzioni elementari: $f(x) = ax + b \to f'(x) = a$ da cui se $f(x) = b \to f'(x) = 0$, $f(x) = x^2 \quad \to f'(x) = 2x$, $f(x) = x^n \quad \to f'(x) = nx^{n-1}$, $f(x) = x^{\alpha} \quad \to f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\alpha > 0$, $f(x) = \sin(x) \quad \to f'(x) = \cos x$, $f(x) = \cos(x) \ \to f'(x) = -\sin x$ e $f(x) = a^x$ $, \to f'(x) = a^x \log a$. Nel caso in cui $a = e$ si ha $f(x) = e^x$ $, \to f'(x) = e^x$.

Proposizione 3. *(Linearità). La derivata di* $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ *è* $\alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$.

Proposizione 4. Derivata del prodotto $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

24 gen. 2006.

Proposizione 5. Derivata del quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Proposizione 6. Derivata della funzione composta *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono derivabili e sia* $F(x) = f(g(x))$ *allora* F *è derivabile e si ha* $F(x)' = f'(g(x))\, g'(x)$.

In particolare, usando la notazione di Leibniz, posto $u = g(x)$, $y = f(u)$ (cosicchè $y = f(g(x))$) allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,.$$

Tra i vari esempi citati si ricorda

$$y(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \log a}, \quad y'(x) = \mathrm{e}^{x \log a} \, \log a\,.$$

Proposizione 7. Derivata della funzione inversa *Sia* $f(x)$ *continua e invertibile in un interno* I *di* x_0 *e ivi derivabile con* $f'(x_0) \neq 0$. *Allora* $f^{-1}(y)$ *è derivabile in* $y_0 = f(x_0)$ *e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Usando questa proposizione si sono calcolate le derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche. In particolare:

$(\arcsin(x))' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arccos(x))' = -1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arctan(x))' = (1+x^2)^{-1}$.

Inoltre, se $g(x) = \log_a(x)$, $g'(x) = 1/(x\,log_a)$ vale anche se $g(x) = \log_a(-x)$, $x < 0$, $g'(x) = 1/(x\,log_a)$. Possiamo dire che $h(x) = \log|x|$, $h'(x) = 1/x$, $x \neq 0$.

Infine $g(x) = \log(f(x))$ si ha

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

che è detta la derivata logaritmica di $f(x)$.

26 gen. 2006. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$. Questa osservazione ci ha portato a definire i casi di **non derivabilità** ovvero i casi in cui $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, includendo anche il caso in cui esse sono infinite. Possiamo così riassumerli:

- **Punti angolosi**: punti per i quali $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ includendo i casi in cui una tra le due risulta essere infinita.
- **Punti a tangente verticale**: $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono infinite e di segno concorde. Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$ ha tangente verticale; $f(x) = \arcsin x$ in $x = \pm 1$.
- **Punti che sono delle cuspidi**:$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono infinite e di segno discorde. Ad esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$

Punti estremali e critici

Definizione 15. *Sia $x_0 \in dom(f)$. x_0 è detto di* `massimo relativo (o locale)` *per f se esiste un intorno $I_r(x_0)$ t.c.*

$$f(x) \leq f(x_0), \ \ \forall x \in I_r(x_0) \cap dom(f) \ .$$

Sia $x_0 \in dom(f)$. x_0 è detto di `massimo assoluti (o globale)` *per f se*

$$f(x) \leq f(x_0), \ \ \forall x \in dom(f) \ .$$

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto i punti saranno chiamati di massimo stretto.

Infine, $f(x_0)$ è detto il MASSIMO di f mentre x_0 è il PUNTO di MASSIMO

Analoga definizione vale per il MINIMO di f.

Definizione 16. *Dicesi* `critico` *di f ogni punto x_0 in cui f è derivabile e $f'(x_0) = 0$ oppure $f'(x_0)$ non esiste.*

Esempi: $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$. $f(x) = x^{3/5}(7 - x)$ ha punti critici in $x = 21/8$ (dove si annulla la derivata prima) e in $x = 0$ dove non è definita.

Teorema 21. *(***di Fermat) Sia $f(x)$ definita in $I_r(x_0)$ e esiste $f'(x_0)$. Se x_0 è un punto estremale allora $f'(x_0) = 0$.**

In pratica in punti estremali sono critici. Notiamo che $f(x) = x^3$ ha $x = 0$ come punto critico che non è estremale. Questo significa che non vale il viceversa del teorema di Fermat.

Riassumendo: i punti estremali di una funzione vanno ricercati tra i punti del $dom(f)$ che sono `critici, di non derivabilità e estremi in` $\mathbb{R}$ `di` $dom(f)$.

31 gen. 2006.

Teorema 22. (di Rolle) *Sia f definita su $[a,b]$ chiuso e limitato. Sia f continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$.*

Il teorema di Rolle dice che se una funzione assume gli stessi valori agli estremi di un intervallo allora esiste almeno un punto critico interno all'intervallo.

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente importante **Teorema di Wierstrass**.

Teorema 23. (di Weierstrass) *Sia f continua e definita su $[a,b]$ chiuso e limitato allora f assume un valore di max assoluto $f(c)$ e un valore di minimo assoluto $f(d)$ per qualche c e d di $[a,b]$.*

Detto altrimenti: $f([a,b]) = [m, M]$ ove $m = \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_m)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_M)$. Vale la pena dire che se una delle ipotesi decade (es. la funzione non è continua oppure l'intervallo non è compatto) il teorema non vale più.

Dim. teorema di Rolle è stata fatta a lezione.

Teorema 24. (di Lagrange o del valor medio) *Sia f continua e definita su $[a,b]$ chiuso e limitato e derivabile in (a,b). Allora esiste un $\xi \in (a,b)$ t.c.*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

I punti ξ del teorema di Lagrange sono detti `punti di Lagrange`.

Dim. teorema di Lagrange è stata fatta a lezione.

Esempi: (i) $f(x) = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[-1, 1]$ ed ha un punto di Lagrange in $\xi = 0$. (ii) $f(x) = \arcsin x,\ x \in [-1, 1]$ ha due punti di non derivabilità in ± 1. I punti di Lagrange sono $\xi = \pm\sqrt{1 - 4/\pi^2}$.

Monotonia di una funzione.

Teorema 25. *Sia I un intervallo in cui f è derivabile. Valgono le seguenti implicazioni*

(a) se f crescente su I allora $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$.

(b1) se $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$ allora f è crescente su I.

(b2) se $f'(x) > 0,\ \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente su I.

Il teorema indica un "se e solo se"

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \text{f crescente su I}$$

e una implicazione

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow \text{f strettamente crescente su I}.$$

Infatti $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ ma $f'(x) = 2x^2 \geq 0$ e si annulla per $x = 0$.

Analogo ragionamento vale per una funzione `decrescente`. Basta sostituire i simoboli di $\geq$ con $\leq$ e $>$ con $<$.

Corollario 7. *Sia f derivabile su I e sia x_0 un punto critico interno ad I. Se $f'(x) \geq 0$ a sinistra di x_0 e ≤ 0 a destra di x_0 allora x_0 è un punto di massimo per f. Viceversa x_0 è di minimo.*

Convessità e Concavità

Definizione 17. *Una funzione f si dice convessa in x_0 (o con concavità rivolta verso l'alto!) se esiste un intorno di raggio r di x_0, $I_r(x_0) \subset dom(f)$ t.c.*

$$f(x) \geq t(x), \forall x \in I_r(x_0),\ x \neq x_0$$

con $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ la retta tangente ad f in x_0.

Se la disuguglianza vale in senso stretto allora è strettamente convessa.

Se vale la disuguaglianza opposta si dice che $f(x)$ è **concava** o **strettamente convessa** in x_0.

Infine, se la definizione vale per ogni punto di un intorno, diremo che la funzione è convessa o concava in tutto quell'intorno.

3 feb. 2006.

Definizione 18. *x_0 è detto punto* **flesso** *per f se esiste $I_r(x_0) \subset dom(f)$ t.c.*

$$\begin{aligned} f(x) &\leq t(x) \quad x < x_0 \\ f(x) &\geq t(x) \quad x > x_0 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} f(x) &\geq t(x) \quad x < x_0 \\ f(x) &\leq t(x) \quad x > x_0 \end{aligned}$$

Nel primo caso si parla di `flesso ascendente` *mentre nel secondo caso di* `flesso discendente`.

Test di concavità/convessità

(a) $f''(x) > 0 \to f$ convessa in I

(b) $f''(x) < 0 \to f$ concava in I.

Da cui se in x_0 si ha

(i) $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \to f$ ha un minimo locale in x_0.

(ii) $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \to f$ ha un massimo locale in x_0.

(iii) $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0 \to f$ potrebbe avere un punto di flesso in x_0.

In ogni caso per verificare se un punto x_0 è di flesso, bisogna studiare il segno di f'' in un intorno di x_0. Come esempio $f(x) = x^4$ non ha un flesso in $x = 0$.

Ricetta per lo studio di una funzione

- dominio di definizione, zeri ed eventuali simmetrie;
- studiare i limiti nei punti all'infinito e nei punti di non definizione;
- individuare eventuali punti estremali e relativi intervalli di monotonia;
- convessità, concavità, flessi;
- disegnarne il grafico.

Un utile teorema che trova applicazione nel calcolo di limiti di forme indeterminate è il **teorema di de l'Hôpital**

Teorema 26. *Siano f, g definite in un intorno di x_0 tranne eventualmente che in x_0 e t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ con $L = 0, \pm\infty$ come pure per $g(x)$.*
Se f, g sono derivabili in un intorno di x_0 e $g'(x) \neq 0$ in tutto l'intorno, allora se esiste finito o infinito

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

questo limite coincide con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

In pratica, se si hanno forme indeterminate, si può calcolare il limite del rapporto delle derivate, che per il teorema coincide con quello del rapporto delle funzioni.

Il teorema di de l'Hôpital serve sostanzialmente

(a) calcolo di limiti di forme indeterminate;

(b) calcolo di ordini di infinitesimo/infinito.

Per (a) alcuni esempi da ricordare.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \ \forall\alpha > 0.$

(d) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \ \forall\alpha > 0.$

Per (b) alcuni esempi da ricordare.

(a) $f(x) = e^x - 1 - \sin x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$ in $x_0 = 0$.

(b) $f(x) = \tan x$ è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = (\pi/2 - x)^{-1}$ per $x \to \pi/2^-$.

(c) $f(x) = x\cos x - \sin x$ è un infinitesimo di ordine 3 rispetto $\varphi(x) = x$ per $x \to 0$.

7 feb. 2006. SVILUPPI DI TAYLOR.

L'idea degli sviluppi di Taylor è di "scrivere" una funzione $f(x), \ x \in I(x_0)$ nel modo seguente

$$f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n) \ , \ p_n \text{ polinomio di grado} \le n\,. \tag{4}$$

Vale il seguente Teorema

Teorema 27. *Sia $n \ge 0$ ed f derivabile n volte in x_0. Allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n)\ . \tag{5}$$

L'uguaglianza (5) è detta **formula di Taylor** di $f(x)$ rispetto ad x_0. $t_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ è detto *polinomio di Taylor di grado n*, mentre $o((x - x_0)^n$ è detto *resto di ordine n nella forma di Peano.*

Teorema 28. *Sia $n \ge 0$ ed f derivabile n volte in x_0 con continuità ed inoltre sia derivabile $n + 1$ volte in $I(x_0)$ tranne x_0. Allora*

$$f(x) = t_{n,x_0}(x) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}, \quad \xi \in (x_0, x). \tag{6}$$

L'uguaglianza (6) è detta **formula di Taylor** di $f(x)$ rispetto ad x_0 con *resto in forma di Lagrange.*

Se $x_0 = 0$ lo sviluppo (5) o (6) si chiama di **Maclaurin**.

Da ricordare

(a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ è lo sviluppo di Maclaurin di e^x con resto in forma di Peano mentre $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n + 1)!}x^{n+1}$, è lo sviluppo di Maclaurin di e^x con resto in forma di Lagrange.

(b) $\log x = x - 1 - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n)$ è lo sviluppo attorno ad $x = 1$. Mediante la trasformazione $x - 1 \longrightarrow x$ si ottiene lo sviluppo di Maclaurin $\log(x+1) = x - \dfrac{(x)^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n!} + o(x^n)$.

(c) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$. Il resto sarebbe $o(x^{2m+1})$, ma poiché il termine successivo è x^{2m+3}, un'informazione più precisa si ha appunto usando $o(x^{2m+2})$.

(d) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$.

(e) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \dbinom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$. Per ottenere gli sviluppi di $1/(x+1)$ o $1/\sqrt{1+x}$ basta prendere $\alpha = -1$ e $\alpha = -1/2$, rispettivamente.

10 feb. 2006. Operazioni con gli sviluppi di Taylor. Siano $f(x) = p_n(x) + o(x^n)$ e $g(x) = q_n(x) + o(x^n)$ allora

(a) $f(x) \pm g(x) = (p_n(x) \pm q_n(x)) + o(x^n)$;

(b) $f(x)g(x) = p_n(x)q_n(x) + o(x^n) = r_n(x) + o(x^n)$. Basta arrestarsi al termine di grado n e tralasciare le potenze da $n+1, ..., 2n$.

(c) Sia $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$. Ma $h(x) = r_n(x) + o(x^n)$ con $r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Quindi $r_n(x)q_n(x) + o(x^n) = p_n(x) + o(x^n)$. Allora per determinare i coefficienti c_k osservo che la parte di grado $\leq n$ del polinomio di grado 2n, $r_n q_n$, deve coincidere con quella di p_n. I coefficienti c_k si determinano $c_0, c_1, \ldots, c_n$ usando la divisione di polinomi `ordinati secondo potenze crescenti di` x.

Alcuni esempi relativi ai punti (a), (b) e (c).

(a) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ usando gli sviluppi di Maclaurin di e^x e e^{-x} diventa

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1!} + o(x^{2m+2}.$$

Analogamente $\cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ diventa

$$\cos h\, x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{2m!} + o(x^{2m+1}.$$

$h(x) = e^{2x} - \sqrt{1+x}$. Usando $e^x = 1 + 2x + o(x)$ ed $(1+x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ si ha $h(x) = \frac{3}{2}x + o(x)$, ovvero $h(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 nell'origine.

(b) $h(x) = e^{2x}\sqrt{1+x} = (1 + 2x + o(x))(1 + \frac{1}{2}x + o(x)) = 1 + \frac{1}{2}x + x^2 + o(x)$ **ma** x^2 è di ordine superiore e può pertanto essere tralasciato. Conclusione: $h(x)$ si comporta come $1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ in un intorno dell'origine.

(c) $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + 2\log(1+x)}$; per calcolare una espansione, basta ricordare gli sviluppi di e^x e $\log(1+x)$ ed eseguire la divisione tra i polinomi (scritti come segue) $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ ed $1 + 2\log(1+x) = 1 + 2x - x^2 + o(x^2)$.

INTEGRALI

- Indefiniti: sono un insieme di funzioni dette primitive.
- Definiti: sono dei numeri che rappresentano l'area delimitata superiormente o inferiormente dal grafico della funzione.

Definizione 19. *Ogni F derivabile su un intervallo I tale che $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ è detta* `primitiva` *di f in I.*

Esempi: $F(x) = x^3/3$ è la primitiva di $f(x) = x^2$, ma lo è pure $F(x) = x^3/3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. $F(x) = \arctan(x)$ oppure $F(x) = \arctan(x) + c$ è la primitiva di $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.

Definizione 20. *Se F e G sono primitive di f su I, allora esiste una costante c t.c. $F(x) = G(x) + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.*

Definizione 21. *L'insieme di tutte le primitive di f si dice* `integrale indefinito` *e si indica con*

$$\int f(x)dx$$

ovvero

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : \ c \in \mathbb{R}\} \ .$$

Una proprietà facilmente verificabile è la linearità dell'integrale:

$$\int (a\, f(x) + b\, g(x))dx = a \int f(x)dx \, + \, b \int g(x)\, dx \, .$$

Due regole di integrazione da non dimenticare.

1. **Integrazione per parti**.

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \, ;$$

dove nel termine di sinistra $f(x)$ viene detta `fattore finito` e $g'(x)$ viene detta `fattore differenziale`.

Esempi.

(a) $\displaystyle\int \log x dx$, assumendo $f(x) = \log x$ e $g'(x) = x$, si ha $\displaystyle\int \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + c$.

(b) $\displaystyle\int e^x \sin x dx$, prendendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \sin x$,si ottiene dopo 2 passi di integrazione per parti $\displaystyle\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$.

2. **Integrazione per sostituzione**.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)\, dy\,.$$

Esempi.
(a) $\displaystyle\int x\, e^{x^2} dx$, posto $y = x^2$ da cui $dy = 2x\, dx$, si ha $\displaystyle\int \frac{e^y}{2}\, dy = \frac{e^y}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c\,.$
(b) $\displaystyle\int \tan x dx$, prendendo $y(x) = \cos x$ e $dy = -\sin x dx$, si ottiene $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{y} dy = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c\,.$ Nel caso generale $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c\,.$

14 feb. 2006. Integrazione di funzioni razionali $f(x) = p_n(x)/q_m(x)$, dove $p_n(x)$, $q_m(x)$ sono polinomi di grado n, m, rispettivamente. Se $n \geq m$, possiamo dividere i polinomi riducendo il problema

$$p_n(x) = s_{n-m}(x)q_m(x) + r_k(x), \quad k \leq m-1\,.$$

Da cui, integrando, il problema si trasforma nell'integrare $\int \frac{r_k(x)}{q_m(x)} dx$. Di solito mediante sostituzione quest'ultimo integrale si cerca di ricondurlo a integrali noti le cui primitive sono log, arctan o simili.

Integrale definito. Si sono affrontati i due approcci classici per definire l'integrale definito.

- **Approccio di Cauchy.** Si prenda un suddivisione di $[a, b]$ in punti $n + 1$ equispaziati $x_k = a + k\,(b-a)/n,\ k = 0, ..., n$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n\,; \tag{7}$$

  dove $s_n = \sum_{k=1}^n m_k(b-a)/n,\ m_k = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ indica la n-esima somma inferiore e $S_n = \sum_{k=1}^n M_k(b-a)/n,\ M_k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ indica la n-esima somma superiore. Somme che per $n \to \infty$ convergono verso lo stesso limite, appunto l'integrale definito.

- **Approccio di Riemann.** Presa una suddivisione di $I = [a, b]$ in punti non necessariamente equispaziati, x_k, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, si costruiscono dapprima le `funzioni a gradini` sui vari sottintervalli provando che se f, g sono due tali funzioni tali che $f \leq g$ allora $\int_I f \leq \int_I g$. Quindi, se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata, detti $s_f = \sup f(x)$ e $i_f = \inf f(x)$ su I, si costruiscono i due insiemi di funzioni a gradini maggiornati e funzioni a gradini minoranti

$$H_f^+ = \{h \text{ gradini} : f \leq h,\ \forall x \in [a, b]\}$$

e

$$H_f^- = \{g \text{ gradini} : g \leq f, \, \forall x \in [a,b]\}$$

definendo l'`integrale superiore` di f su [a,b] come il numero

$$\int_I^+ f = \inf \left\{ \int_I h \; : \; h \in H_f^+ \right\}$$

e `integrale inferiore` di f su [a,b] come il numero

$$\int_I^- f = \sup \left\{ \int_I g \; : \; g \in H_f^- \right\} .$$

Allora una funzione limitata su $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann se

$$\int_I^+ f = \int_I^- f$$

e il valore comune viene detto integrale definito di f su $[a,b]$ e si indica come $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ o $\displaystyle\int_I f$.
Sono integrabili secondo Riemann, le funzioni $f \in \mathcal{C}[a,b]$, le funzione continue a tratti su [a,b], le funzioni $f \in \mathcal{C}(a,b)$ e limitate su [a,b], le funzioni monotone su $[a,b]$.

Proprietà dell'integrale definito. Oltre alla additività e linearità (già viste per l'integrale indefinito, ricordiamo la positività, ovvero se $f \geq 0$ allora $\int_I f \geq 0$. Come conseguenza, se $f \geq g$ su $[a,b]$ allora $\int_I f \geq \int_I g$. Inoltre vale la maggiorazione

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \, .$$

Proposizione 8. (della media integrale). *Se $m \leq f(x) \leq M$ per $a \leq x \leq b$ allora*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M \, .$$

La dimostrazione si lascia per esercizio.

Corollario 8. *Se $f \in \mathcal{C}[a,b]$ allora esiste un $\xi \in (a,b)$ t.c.*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \, .$$

Osserviamo che tale corollario vale anche se f non è continua come nel caso seguente

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

cioè la continuità è solo una condizione sufficiente.

21 feb. 2006. Dato un intervallo I non necessariamente compatto. Per un fissato $x_0 \in I$ consideriamo la funzione

$$F(x) := F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,.$$

$F(x)$ si chiama `funzione integrale`.

Teorema 29. *(***Teorema fondamentale del calcolo integrale***) Se $f \in \mathcal{C}(I)$ preso $x_0 \in I$ consideriamo la funzione integrale $F_{x_0}(x)$. Allora F è derivabile e si ha*

$$F'_{x_0}(x) = f(x), \;\; \forall x \in I\,. \tag{8}$$

Dim. fatta a lezione. □

Usando la notazione di Leibniz, la (8) si può riscrivere come segue

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x), \;\; \forall x \in I\,. \tag{9}$$

ovvero gli operatori di integrazione e di derivazione sono "intercambiabili", detto altrimenti se prima integriamo e poi deriviamo, otteniamo la funzione di partenza e viceversa.

Corollario 9. *Nella ipotesi del Teorema precedente, se G è una qualunque primitiva di f su I allora*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = G(x) - G(x_0), \;\; \forall x \in I\,.$$

Dim. fatta a lezione. □

Corollario 10. *Sia $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e G sia una primitiva di f su $[a,b]$. Allora*

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = G(b) - G(a)\,.$$

Le notazioni usate sono: $G(b) - G(a) = G(x)\big|_a^b = [G(x)]_a^b$. Ad esempio la derivata di $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$, essendo $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ continua, è $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Corollario 11. *Sia $f \in \mathcal{C}^1(I)$, allora per ogni $x_0 \in I$ si ha*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \;\; \forall x \in I.$$

Dim. Basta osservare che f è una primitiva della derivata. □

Come applicazione, abbiamo considerato $f(x) = \arctan(x)$ di cui sappiamo $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Allora

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\,.$$

Ora, usando la serie di Maclaurin di $\frac{1}{1+x^2}$ che è

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, t^{2k} + o(t^{2m+1})\,,$$

integrando otteniamo

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + \int_0^x (-1)^{2m} t^{2m} dt + \int_0^x o(t^{2m+1})dt\,.$$

L'ultimo integrale si calcola usando l'osservazione che se $\varphi(x) = o(x^\alpha)$, per $\alpha \to 0$, $\alpha \geq 0$ allora $\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ è t.c. $\psi(x) = o(x^{\alpha+1})$. In conclusione otteniamo l'espananansione di Maclaurin di $\arctan(x)$,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2})\,.$$

Naturalmente le regole per l'integrazione definita sono le stesse del caso indefinito. Ad esempio l'integrazione per parti è

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\,,$$

mentre quella per sostituzione diventa

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy\,,$$

con ovvio significato delle variabili usate.

Applicazione al calcolo di aree

Un esempio. Prendiamo le due curve $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$ che si intersecano nei punti $0, 1$ individuando una regione la cui area è la differenza tra gli integrali (le aree) in [0,1] delimitate dalle due curve, ovvero

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{5}{12}\,.$$

In generale l'area racchiusa tra 2 curve $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ che si intersecano nei punti $x_1 < x_2$ è

$$Area = \int_{x_1}^{x_2} (g_1(x) - g_2(x))dx\,.$$

28 feb. 2006. Integrali Impropri sono gl'integrali definiti

(i) su intervalli illimitati;

(ii) di funzioni discontinue, su un numero finito di punti di un intervallo finito.

Caso (i). Consideriamo la semiretta $[a, +\infty)$ e l'insieme delle funzioni

$$F_{loc}([a, +\infty)) = \left\{ f : \int_a^c f(t)dt < \infty,\ \forall c \in [a, +\infty) \right\} .$$

Presa una generica $f \in F_{loc}([a, +\infty))$ consideriamo la funzione integrale $F(c) = \int_a^c f(t)dt$ allora si definisce **integrale improprio**

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(t)\, dt\, .$$

Se il limite esiste finito diremo che l'integrale è **convergente** (o che la funzione f è integrabile) altrimenti che è **divergente**. Se il limite non esiste allora diremo che l'integrale è oscillante.

Esempi. Consideriamo il calcolo di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

che corrisponde al calcolo dell'area delimitata superiormente dal grafico della curva $y = \frac{1}{x^2}$ e inferiormente dalla retta $y = x$. Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \ = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$$

Ora $\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = 1 - 1/c$, che per $c \to +\infty$ ci dice che l'integrale improprio converge verso 1.

Se invece consideriamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

verificheremo che diverge.

In generale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \ = \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1\, . \end{cases}$$

Criteri di convergenza

1. **Criterio del confronto**. Siano $f, g \in F_{loc}([a, +\infty))$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$. Allora sappiamo che

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

Pertanto se g converge anche f converge, se f diverge anche g diverge.
In particolare abbiamo dimostrato con tale criterio che $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ converge mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ diverge.

2. **Criterio del confronto asintotico**. Se f ha ordine di infinitesimo $\alpha \in \mathbb{R}$ rispetto a $\varphi(x) = 1/x$ per $x \to \infty$, se $\alpha > 1$ allora f ha integrale improprio convergente altrimenti diverge.
   Ad esempio $\int_1^{+\infty}(\pi - 2\arctan(x))dx$ diverge poichè l'integranda ha ordine di infinitesimo $\alpha = 1$ rispetto $\varphi(x) = 1/x$.
3. **Criterio di convergenza assoluta.** Se $f \in F_{loc}([a, +\infty))$ è t.c. $|f| \in F([a, +\infty))$ (dove $F([a, +\infty))$ è l'insieme delle funzioni integrabili su $[a, +\infty)$), allora $f \in F([a, +\infty))$ e si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \,.$$

   Come esempio abbiamo provato che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ è convergente.

Caso (ii). Un esempio per chiarire come stanno le cose. Consideriamo di calcolare $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$. L'integranda è illimitata in $x = 2$, ovvero $x = 2$ è un asintoto verticale. Il calcolo dell'integrale procede nel seguente modo

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \to 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3} \,.$$

Quindi nonostante la funzione sia illimitata in $x = 2$ l'integrale improprio converge. Situazioni analoghe si trovano se il(i) punto(i) di discontinuità è(sono) all'interno, come nel calcolo di $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx$. In questo caso basterà usare l'additività dell'integrale e si proverà che l'integrale diverge a $-\infty$. Se invece avessimo fatto il calcolo diretto senza considerare la discontinuità avremmo trovato un risultato sbagliato. Infatti si avrebbe $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx = [\log|x-1|]_0^3 = \log 2$ che è sbagliato!

Anche nel caso (ii) vale il **criterio del confronto asintotico**. Supponiamo che f sia discontinua in $x = b$ e consideriamo $\int_a^b f(t)dt$. Se f ha ordine di infinito $\alpha \in \mathbb{R}$ per $x \to b^-$ rispetto a $\varphi(x) = 1/(b - x)$, se $\alpha < 1$ allora f ha integrale improprio convergente altrimenti diverge.

Come esempio consideriamo $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx$. Per $x \to 0^+$ sappiamo che $\sin x \sim x$ e quindi $\dfrac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pertanto essendo l'ordine di infinito $\alpha = 1/2 < 1$ concluderemo, in base al criterio asintotico, che l'integrale converge.

Serie numeriche e criterio dell'integrale. Sia $f \geq 0$ decrescente su $[1, +\infty)$. Sia $a_n = f(n)$ e consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. La serie converge se e solo se $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

Consideriamo, ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ e vogliamo verificare se converge. Usando il criterio appena visto, consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ che è continua, positiva e decrescente quando $x > e$. Pertanto

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\log x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^2}{2} = \infty$$

che conferma il fatto che la serie diverge.

Infine usando questo criterio, detto $R_n = s - s_n$ il resto (o errore) n-esimo, se $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge il resto soddisfa le disuguaglianze

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

che ci consentono di dare delle stime dell'errore.