PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Dott. S. De Marchi

`Verona, 05 luglio 2005`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**

Per tutti i metodi di cui si chiede l'implementazione, si usi il test sull'errore relativo con $tol = 1.e-6$.

1. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x+2) - x^2 - x$ di cui si vogliamo trovare le radici.
   - Chi sono le radici di $f(x) = 0$? Hanno lo stesso segno?
   - Scelta la radice di segno positivo α si individuino due metodi convergenti di iterazione funzionale, le cui funzioni di iterazione sono $g_i(x)$, $i = 1, 2$: determinare per ciascuno di essi il numero di iterazioni necessarie per calcolare la soluzione α.
   - Si spieghi, analizzando g_i' nell'intervallo separatore, perchè i metodi hanno velocità di convergenza differenti.
   - Esiste anche un terzo metodo di iterazione funzionale. Determinatolo dire perchè non può convergere alla radice positiva.

2. Data la matrice *simmetrica*.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Localizzare, mediante i cerchi di Gerschgorin, gli autovalori di A e dare alcune stime "a priori".
   (b) Determinare tutti gli autovalori con il metodo più idoneo per la struttura della matrice.

3. Si consideri la funzione $f(x) = \sin x + \cos x$. Si dia una maggiorazione dell'errore del d'interpolazione di Lagrange usando il polinomio d'interpolazione $P_4 f(x)$ di grado 4 sui nodi $x_k = \pi/2 + k\,\pi/4$, $k = 0, 1, \ldots, 4$.

   Detto quindi $E_n(f) = f(x) - P_n f(x)$ l'errore d'interpolazione, usare la formula
$$\max_{x\in I} |E_n(f)| \leq \max_{x\in I} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}$$
   dove h è il passo di discretizzazione, come maggiorazione dell'errore.

   Verificare la consistenza dei risultati, usando una vostra implementazione dell'interpolante in forma di Lagrange o in forma di Newton.

`Tempo:` 3 ore.

SOLUZIONI

```
%*****************************************
% Soluzioni del Compito del 05 luglio 2005
%*****************************************
%--------------------
% Esercizio 1
%--------------------
format long

% Dapprima disegno la funzione per sapere quali e quanti zeri ha
ezplot('log(x+2)-x^2-x',[-5 2]) grid
% Dal plot si deduce che le soluzioni sono -1 e 0.598 (circa)
pause

% Calcolo la radice positiva con due metodi di iterazione funzionale
% convergente.

tol=1.e-6; kmax=1000;

% Primo metodo
x0=0.0; x1=log(x0+2)-x0^2; k=1;

while abs(x1-x0)/abs(x1) > tol & k <=kmax
    x0=x1;
    x1=log(x0+2)-x0^2;
    k=k+1;
end
disp('La radice cercata a meno di tol e'' '); x0
disp('Numero di iterazioni: '), k
pause

% Secondo metodo

x0=0; x1=sqrt(log(x0+2)-x0); kmax=1000; k1=1;

while abs(x1-x0)/abs(x1) > tol & k <=kmax
    x0=x1;
    x1=sqrt(log(x0+2)-x0);
    k1=k1+1;
end
disp('La radice cercata a meno di tol e'' '); x0
```

```
disp('Numero di iterazioni: '), k1

if(k<k1)
    disp('Il primo metodo converge pi velocemente')
else
    disp('Il secondo metodo converge pi velocemente')
end

% k1<k. Per capire il perch guardiamo alle derivate prime delle
% funzioni d'iterazione dei due metodi.
% Nell'intervallo [0,1], che  un intervallo separatore,
% plottiamo il modulo delle rispettive derivate.

figure(1) ezplot('abs((2*x^2+4*x-1)/(x+2))',[0,1]); grid
figure(2)
ezplot('abs(1/(2*sqrt(log(x+2)-x))*(1/(x+2)-1))',[0,1]) grid
%
a1=(2*x0^2+4*x0-1)/(x0+2)
a2=abs(1/(2*sqrt(log(x0+2)-x0))*(1/(x0+2)-1))
% Dai grafici comprendiamo che la derivata prima in alfa del
% secondo metodo  pi piccola in modulo. Infatti a1 > a2!

pause
% Terzo metodo
disp('Terzo metodo ')

x0=-3; x1=exp(x0^2+x0)-2; k1=1;

while abs(x1-x0)/abs(x1) > tol & k <=kmax
    x0=x1;
    x1=exp(x0^2+x0)-2;
    k1=k1+1;
end
disp('La radice cercata a meno di tol e'' '); x0
disp('Numero di iterazioni: '), k1
figure(3)
ezplot('abs(exp(x0^2+x0)*(2*x0+1))',[0,1])
grid
%-------------------------------------------------------------------------
% Dal grafico della derivata prima del terzo metodo deduciamo che
% non pu convergere alla radice positiva poich essa
% nell'intervallo separatore [0,1] in modulo sempre maggiore di 1.
```

```
%------------------------------------------------------------------------

>> esame05luglio2005esI
La radice cercata a meno di tol e'

x0 =

   0.59752418059794

Numero di iterazioni:

k =

    62

La radice cercata a meno di tol e'

x0 =

   0.59752363540364

Numero di iterazioni:

k1 =

    23

Il secondo metodo converge pi velocemente

a1 =

   0.81006521082899


a2 =

   0.51463870874464

Terzo metodo La radice cercata a meno di tol e'

x0 =
```

```
    4.014287934927351e+002

Numero di iterazioni:

k1 =

     2

>>

%-----------------------------
% Esercizio 2
%-----------------------------
clear
tol=1.e-6;
% -----> Matrice  <-----
a=[4 1 0 0 0; 1 3 2 0 0 ; 0 2 -1 -4 0 ; 0 0 -4 6 2; 0 0 0 2 5];
%-----------------------------------------------

%-----------------------------------------------------
% Parte (a)
%
% Localizzo gli autovalori con i cerchi di Gerschgorin
% Oppure osservo che la matrice  tridiagonale e simmetrica!
% Con la tecinca delle successioni di Sturm
% abbinata alla tecnica di Givens
% (vedasi esercitazione del 7 febbraio 2005 alla pagina web del sottoscritto)
% possiamo stimare un intervallo che contiene gli autovalori come segue.

d=diag(a);
b=[0; diag(a,-1); 0];
for i=2:length(b),
dd(i-1)=d(i-1)-(abs(b(i))+abs(b(i-1)));
end;

alfa=min(dd)

for i=2:length(b),
bb(i-1)=d(i-1)+(abs(b(i))+abs(b(i-1)));
end;

beta=max(bb)
```

```
%[alfa,beta]  l'intervallo che contiene gli autovalori
% Si verificher che coincide con quello che si ottiene con
% i cerchi di Gerschgorin.

%-----------------------------------------------------
% Parte (b)
%-----------------------------------------------------

% Per il calcolo degli autovalori ho quindi due possibilit:
% (i) Metodo di Jacobi
% (ii) Metodo della successione di Sturm... che per  inefficiente.

%  Uso il metodo di Jacobi
%  [D]=symJacobi(a,tol): D matrice diagonale che conterr tutti
%  gli autovalori della matrice 'a' a meno di tol
[D]=symJacobi(a,tol)

>> esame05luglio2005esII

alfa =

    -7


beta =

    12


D =

   4.13629493228054  -0.00000000000001   0.00000000000000   0.00000000000000  -0.0000000000
  -0.00000000000001   2.59855395346480  -0.00000000000000   0.00000000000000   0.0000000000
   0.00000000000000  -0.00000000000000  -3.42390617497599   0.00000000000000   0.0000000000
   0.00000000000000   0.00000000000000   0.00000000000000   8.80925551560336
   0.00000000000000  -0.00000000000000  -0.00000000000000  -0.00000000000000   4.8798017736

>>

%------------------------
% Esercizio 3
```

```
%-----------------------
format long

% PRIMA PARTE

% Costruisco la partizione equispaziata
h=pi/4;        % passo di discretizzazione
x=pi/2:h:3/2*pi;

% Calcolo l'errore usando la formula data
% Devo prima determinare la derivata 5^ della funzione
% f(x)=sin(x)+cos(x); che chiamo f5(x)=cos(x)-sin(x);
% Quindi calcolo il massimo su [x(1),x(end)] di
% abs(f5).

xx=x(1):0.001:x(end); ff=cos(xx)-sin(xx); MAX=max(abs(ff));

% L'errore
% E=MAX/20*h^5;

disp('Errore stimato!') err1=MAX/20*h^5

% SECONDA PARTE

%-------------------------------------------------
% Interpolazione di funzioni: Algoritmo di Neville
%-------------------------------------------------

a=x(1); b=x(end); nmax=4;

xx=a:0.001:b;  % target points
yy=cos(xx)+sin(xx);   % i valori della funzione sui targets
err=[];

for n=2:nmax,
    p=[];
    x=a:(b-a)/n:b;
    y=cos(x)+sin(x);
    for k=1:length(xx),
        p(k)=neville(a,b,x,y,xx(k));
    end
    plot(xx,yy,'-r',xx,p,'--b',x,zeros(1,length(x)),'ok')
```

```
    legend('funzione','Pol. interpolante','nodi interp.');
    titlestring=['Polinomio d''interpolazione di grado ', num2str(n)];
    title(titlestring);

  % Calcolo dell'errore in norma infinito
    err(n-1)=norm(yy-p,'inf');
end disp(' ')
disp('Errore d''interpolazione in norma infinito ') err(3)

% Come si vede la stima err1 rappresenta una sovrastima dell'errore
% err(3) ottenuto usando il polinomio di interpolazione in forma di
% Neville.
%
% NB: risultati analoghi si ottengono usando la forma di Lagrange o Newton
%     per l'unicit del polinomio di interpolazione!
%

>> esame05luglio2005esIII
Errore stimato!

err1 =

   0.02113169698591


Errore d'interpolazione in norma infinito

ans =

   0.00985606118354

>>
```