PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Prof. S. De Marchi

`Verona, 06 settembre 2005`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Inoltre consegnare un floppy con tutti i files/scripts usati per produrre i risultati.

1. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 3\,\mathrm{e}^x + 3$ di cui si vogliamo trovare gli zeri.
   - Individuare le due radici reali di $f(x) = 0$ e i corrispondenti intervalli separatori (che denoteremo con I_{α_1} e I_{α_2}) e verificare che $\alpha_1 < \alpha_2 = 0$.
   - Si determini α_1 con il metodo delle secanti. Usare un opportuno test d'arresto con $tol = 1.e-8$.
   - *facoltativo:* individuare un metodo di iterazione funzionale convergente ad α_1.

2. Data la matrice
$$A = \mathtt{diag(ones(7,1)*10) + diag(ones(6,1)*3,+1) + diag(ones(6,1)*3,-1)}$$
e il termine noto
$$b = [\mathtt{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}]^{\mathtt{T}}.$$
   (a) Dire perchè convergono i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.
   (b) Fissata la tolleranza $\tau = 1.e - 9$, sia P la matrice di iterazione tale che $\|P\| < 1$. Risolvendo
$$\frac{\|P\|^k}{1-\|P\|}\|x^1 - x^0\| < \tau \qquad (1)$$
   possiamo calcolare a priori il numero di iterazioni k necessarie per ottenere una soluzione a meno di τ. Partendo dalla soluzione iniziale `x0=`**0** e usando la norma infinito, $\|\ \|_\infty$ determinare k sia per il metodo di Jacobi che per Gauss-Seidel.
   (c) Verificare sperimentalmente i risultati ottenuti applicando i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, rispettivamente, alla soluzione del sistema $A\,x = b$.

3. Si consideri l'integrale
$$I = \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx$$
   (a) Calcolare a priori il numero di nodi necessari per il calcolo di I mediante il metodo dei trapezi con errore $\leq 10^{-4}$.
   (b) Calcolare numericamente l'integrale dato con il metodo dei trapezi. Quanti nodi sono stati necessari? Calcolare inoltre l'errore assoluto usando come valore esatto quello ottenuto con la funzione `quadl` di Matlab.

Tempo: **3 ore**.

Primo esercizio

```
clear;
format long
% Primo esercizio
%----------------------
% Parte (i)
% ---------------------
disp('Parte (i)') disp('Premi un tasto per continuare'); pause

% Siano f1(x)=x^3; f2(x)=3*(exp(x)-1)
%
% f1(x) < 0 per x<0, f1(x)=0 se x=0 e f1(x)>0 per x>0
%
% f2(x)=0 per x=0, lim x-> -oo f2(x)=-3, lim x->+oo f2(x)=+oo
% Pertanto f1=f2 oltrecch per x=0 anche per un x=alfa1<0.
%
% Pertanto alfa_1  negativa e alfa_1<alfa_2=0.
% Faccio un plot
f='x^3-3*exp(x)+3';
ezplot(f,[-2,0])
grid
disp('Analizzando il grafico (mediante uno zoom) si scopre
che alfa_1  circa -1.3');

%-----------------------------
% Parte (ii)
% ----------------------------
disp('Parte (ii) '); disp('Premi un tasto per continuare');pause
% Applico ora il metodo delle secanti per il calcolo di alfa_1
% come intervallo separatore considero [-1.5,-1.1]

disp('Metodo delle secanti ') a=-1.5; b=-1.1; tol=1.e-8; kmax=100;
x=a; fa=eval(f); xval=[x];
fval=[fa]; x=b; fb=eval(f);
xval=[xval;x]; fval=[fval;fb];
err=tol+1; k=0; xdif=[];
while (k <=
kmax& err > tol),
    k=k+1;
    x=b-fb*(b-a)/(fb-fa);
    xval=[xval;x]; fnew=eval(f);
    fval=[fval;fnew]; err=abs(b-x); xdif=[xdif;err];
```

```
    a=b; fa=fb; b=x; fb=fnew;
end
disp('Numero di iterazioni ');
k
disp(' Zero (alfa_1) = ') x

%-----------------------------
% Parte (iii)
% ----------------------------
disp('Parte (iii) (facoltativa)');
disp('Premi un tasto per continuare');pause disp('Metodo iterativo
')
% La funzione d'iterazione richiesta si ricava dalla f, di cui sopra,
% isolando x. Il metodo che si ottiene ha convergenza superlineare, infatti
%
% x=-sqrt((3*exp(x)-3)/x).
%
disp('Grafico della derivata della funzione d''iterazione ')
ezplot('-((3*exp(x)-3)/x)^(-0.5)*(3*exp(x)*(x-1)+3)/x^2',[-1.5,-1.1]);grid

% Dal grafico deduco che  in modulo minore di 1

disp('Premi un tasto per continuare');pause

x0=-1.5; x1=-sqrt((3*exp(x)-3)/x);
k=0;
while(abs(x0-x1)>1.e-8 & k<kmax)
    x0=x1;
    x1=-sqrt((3*exp(x)-3)/x);
k=k+1;
end
disp('Numero di iterazioni ');
k
disp(' Zero (alfa_1) = ') x1
```

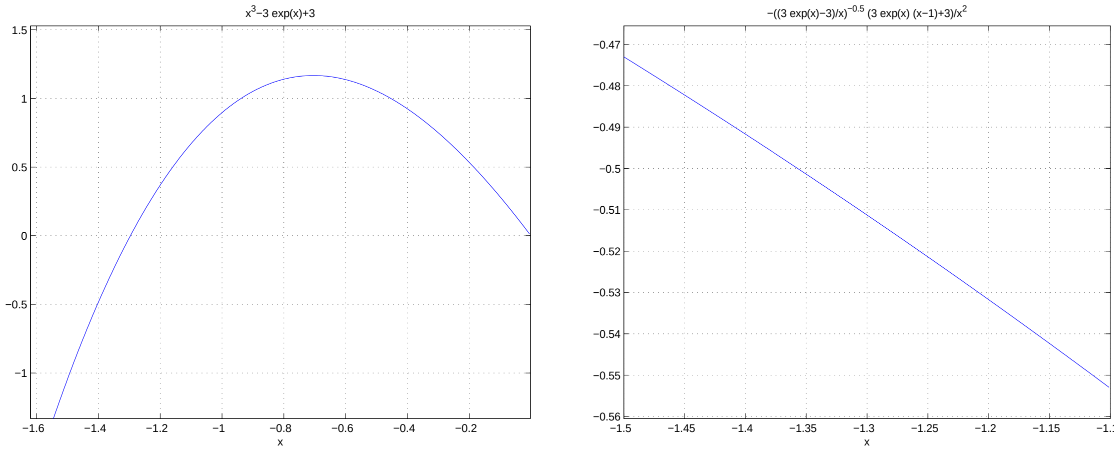

Figure 1: `Sinistra`: funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 0]$. `Destra`: derivata della funzione d'iterazione (punto facoltativo)

Secondo esercizio

```
clear;
format long
% Secondo esercizio
%-----------------------
% Parte (i)
% ----------------------
% La risposta  ovvia: la matrice  tridiagonale, diagonalmente dominante quindi Jacobi e Gau
% convergono. Come verifica ulteriore calcoliamo la norma infinito di entrambe le matrici J
% GS, di Gauss- Seidel.

% matrice
A =  diag(ones(7,1)*10)+diag(ones(6,1)*3,+1)+diag(ones(6,1)*3,-1);
% termine noto
b = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7];

% Matrice di Jacobi e sua norma infinito
 D=diag(diag(A)); L=tril(A)-D; U=triu(A)-D;
 J = -(inv(D))*(L+U);
 normJ=norm(J,inf)

% Matrice di Gauss_Seidel e sua norma infinito

D=diag(diag(A)); L=tril(A)-D; U=triu(A)-D;
GS=-inv((D+L))*U;
```

```
normGS=norm(GS,inf)
```

Facendo eseguire il codice appena scritto otteremo i seguenti valori per `normJ` e `normGS`

```
normJ =

   0.60000000000000


normGS =

   0.42825900000000
```

Per rispondere alla seconda parte, posto $\tau = 1.e-9$, ricaviamo k dalla (1) risolvendo la disequazione

$$k \log(\|P\|) \leq \log\left(\frac{\tau(1-\|P\|)}{\|x^1 - x^0\|}\right) .$$

Ricordando che se $\|P\| \leq 1$ (come accade nel caso di convergenza!) allora $\log(\|P\|) < 0$, si ottiene

$$k \geq \frac{\log\left(\frac{\tau(1-\|P\|)}{\|x^1 - x^0\|}\right)}{\log(\|P\|)} . \tag{2}$$

Ora sostituendo in (2) la matrice P con la matrice J e GS e x^1 con la prima iterata del metodo di Jacobi e Gauss-Seidel, si ottiene

$$\begin{aligned} &k_j \geq 41.66 \quad \textit{con Jacobi} \\ &k_{GS} \geq 25 \quad\;\;\; \textit{con Gauss}-\textit{Seidel} \end{aligned} .$$

Si verifichi inoltre che $\|x^1 - x^0\|_\infty = 0.7$ con Jacobi e $\|x^1 - x^0\|_\infty \simeq 0.953$ con Gauss-Seidel.

Infine per la parte (c) basta applicare le funzioni Matlab implementate in classe per il calcolo della soluzione con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel ottendo

```
%
% Jacobi
%
xj =

   0.06270322109370
   0.12432259655798
   0.18955479078699
   0.24382810131036
```

```
   0.33101820542114
   0.31944454777750
   0.60416663572785

kj =

    36
%
% Gauss-Seidel
%
 xgs =

   0.06270322083804
   0.12432259669772
   0.18955479053825
   0.24382810128682
   0.33101820528569
   0.31944454771277
   0.60416663568617


kgs =

    19
```

Come si nota, il numero di iterazioni ottenute sperimentalmente, è inferiore ai valori stimati. Ma questo è corretto poiché (2) è una sovrastima determinata usando l'iterazione x^1.

Terzo esercizio

La parte (a) si risolve chiedendo che il modulo dell' errore del metodo dei trapezi composito sia minore o uguale di 10^{-4}. Ovvero che

$$\frac{1}{12}(b-a)h^2 \, \|f''\|_\infty \le 10^{-4} \; . \tag{3}$$

dove $h = \frac{(b-a)}{m}$.

Ora, $b = \pi$ e $a = 0$, mentre

$$f''(x) = \frac{-2\cos(2x)(1+\sin^2(x)) + 2(\sin(2x))^2}{(1+\sin^2(x))} \quad :$$

Quindi plottando $f''(x)$ in $[0, \pi]$ si vede che

$$\|f''\|_\infty = 2 \; .$$

Da cui ricaviamo

$$h \le 0.0138 \Longrightarrow m \ge 229 \; .$$

Per rispondere alla parte (b), una possibile implementazione del metodo dei trapezi composito è

```
clear
% Metodo dei trapezi composito
a=0; b=pi; h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
fTc=funQ(x);
% Valore esatto dell'integrale
realValue=quadl(@funQ,a,b,1.e-8);
xx=a:0.01:b;
yy=funQ(xx);
plot(xx,yy,'-.g',x,fTc,'o');

fTc(2:end-1)=2*fTc(2:end-1); ValTc=0.5*h*sum(fTc);

while abs(realValue-ValTc) > 1.e-4
  n=n*2;
  h=(b-a)/n;
  x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
  fTc=funQ(x);
  fTc(2:end-1)=2*fTc(2:end-1);
  ValTc=0.5*h*sum(fTc)
```

```
end

disp(' Il numero di punti necessari e'' '); n+1

%Plot di controllo
xx=a:0.01:b; yy=funQ(xx);
x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
fTc=funQ(x);
plot(xx,yy,'-.g',x,fTc,'o');


function y=funQ(x)
y=1./(1+sin(x).^2);
end

% Esecuzione
ValTc =

   2.35619449019234


ValTc =

   2.22529479629277


ValTc =

   2.22144480529572

 Il numero di punti necessari e'

ans =

     9
```

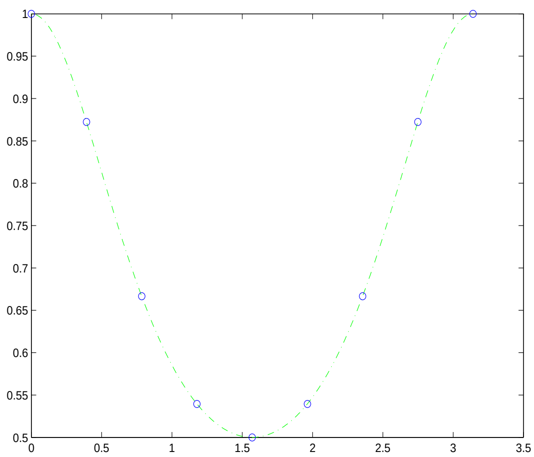

Figure 2: La funzione integranda in $[0, \pi]$ e i punti di quadratura utilizzati per avere un errore a meno di $1.e - 4$.