PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Prof. S. De Marchi

`Verona, 21 giugno 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Consegnare un floppy con tutti i files/scripts usati per produrre i risultati.

NOTA: non allegate immagini in formato Matlab .fig ma .jpg o .eps.

1. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - \sin \pi x \, \mathrm{e}^{-x}$.

   (a) Individuare un metodo di iterazione funzionale convergente linearmente alla radice positiva, α, di $f(x)$.

   (b) Individuare un metodo di iterazione funzionale convergente quadraticamente alla radice $\beta = 0$, di $f(x)$.

   In tutti i casi usare $tol = 1.e-6$ e calcolare l'errore assoluto.

2. Si considerino i valori di tabella

x_i	1	2.5	3	5	6.5	8	9.3
y_i	4	2	3	3.5	3.9	7	5.3

   (a) determinare il polinomio P_m, di grado $m = 3$ approssimante le coppie di valori (x_i, y_i) nel senso dei minimi quadrati discreti.

   (b) Si giustifichi il fatto che per $m = 6$ il polinomio è interpolante.

   (c) Si consideri il punto $\bar{x} = 4$ e come valore corrispondente $\bar{y}$, quello dell'interpolante lineare sull'intervallo [3,5]. Si ora $|P_m(\bar{x}) - \bar{y}|$ l'errore assoluto in $\bar{x}$. Far vedere che per $m = 2$ l'errore è minimo.

3. Calcolare

   $$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^2 - \sin \pi x) \mathrm{e}^{-x} dx$$

   con il metodo dei trapezi composito con un'approssimazione di $1.e-4$. Dire anche quanti punti servono per ottenere l'approssimazione richiesta.

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

1. Osservo che $f(x) = 0$ per $\alpha > 0$ e $\beta = 0$.

   (a) La funzione di iterazione richiesta è $g_1(x) = \sqrt{e^{-x} \sin \pi x}$.

   (b) La funzione di iterazione richiesta è $g_2(x) = \dfrac{1}{\pi} \arcsin \dfrac{x^2}{e^{-x}}$. La derivata prima $g_2'(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{e^{-x}}}} \cdot \dfrac{x(2+x)}{e^{-x}}$ che si annulla ancora per $x = 0$. Questo dice appunto che il metodo iterativo converge con ordine almeno quadratico alla radice. La verifica si ha plottando l'errore assoluto, che decade percorrendo un arco di parabola.

```
clear

%-----------------------------------------------
% Esercizio 1 del compito del 21 giugno 2006
%-----------------------------------------------
x=input('Valore iniziale = ');
%x1=sqrt(sin(pi*x)*exp(-x)); %questo metodo converge lentamente alla radice positiva
x1=asin(x^2/exp(-x))/pi; %questo metodo converge quadraticamente alla radice x=0.
e(1)=abs(x-x1); z(1)=x1; i=1; while(abs(x-x1)>1.e-6 & i<300)
    x=x1;
    %x1=sqrt(sin(pi*x)*exp(-x));
    x1=asin(x^2/exp(-x))/pi;
    i=i+1;
    e(i)=abs(x-x1);
    z(i)=x1;
end semilogy(1:i,e,'--');

legend('errore');
i
x
>> esame21giugno2006esI
Valore iniziale = -.3
 i =
     4
x =
  6.8481e-009
>>
```

2(a),(b) In questi 2 casi, basta costruire il sistema delle equazioni normali chiedendo in input il grado del polinomio approssimante. Per $m = 6$, P_m è proprio l'unico polinomio interpolante.

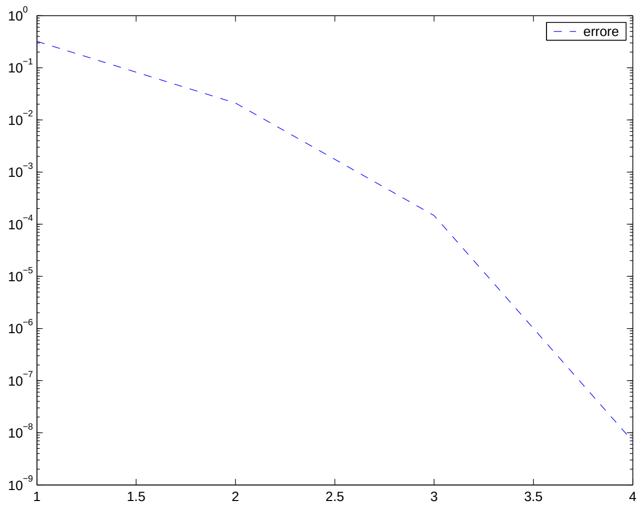

Figure 1: Errore nel caso EsI(b)

(c) Anzitutto il valore $\bar{y} = (3.5 - 3)/(5 - 3) = 3.25$. Pertanto usando il polinomio P_m costruito in (a), dapprima lo valuteremo in $\bar{x} = 4$ e quindi dovremo calcolare per $m = 1, ..., 6$ le differenze $|P_m(\bar{x}) - \bar{y}|$. Si osserverà appunto che per $m = 2$ si ha il risultato ottimale, in quanto nell'intervallo [3,4], $P_2(x)$ è una parabola che si avvicina al punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

```
clear

%-------------------------------------------
% Esercizio 2 del compito del 21 giugno 2006
%-------------------------------------------
% parte (i)
m=input('grado del polinomio approssimante = ');

x=[1 2.5 3 5 6.5 8 9.3];
y=[4 2 3 3.5 3.9 7 5.3];
plot(x,y,'r*')
hold on

% Costruiamo il sistema delle equazioni normali
% per determinare il polinomio di grado m
k=0; for i=1:m+1,
    for j=i:m+1,
        a(i,j)=sum(x.^(j+k-1));
        a(j,i)=a(i,j);
```

```
    end
   k=k+1;
   % termine noto
   if(i==1)
       b(1)=sum(y);
  else
       b(i)=(x.^(i-1))*y';
  end
end

%coefficienti del polinomio

c=inv(a)*b';

% plot del polinomio approssimante

xx=min(x):0.01:max(x);
for i=1:length(xx),
    yy(i)=0;
for k=1:m+1,
    yy(i)=yy(i)+c(k)*xx(i)^(k-1);
end end
plot(xx,yy,'b-.')
hold off

% parte (ii)
% ------------------------------------------------------------------
  % Calcolo dell'errore
  % inserisco xerr e il valore yerr nel posto corrispondente
  % nota: non serve ordinare il vettore perch le differenze divise
  %       sono invarianti per permutazioni dei punti.
  %------------------------------------------------------------------
   xerr=4;
   % yerr  il valore dell'interpolante lineare tra i punti
   %      (3,3) e (5,3.5)
   yerr=3.25;

   for i=1:length(xx),
       if abs(xx(i)-xerr)<0.01,
           k=i;
       end
   end
```

```
   err=abs(yy(k)-yerr)

>> esame21giugno2006esII
grado del polinomio approssimante = 2
 err =
    0.0395
>> esame21giugno2006esII
grado del polinomio approssimante = 3

err =
    0.5870
>> esame21giugno2006esII
grado del polinomio approssimante = 4

err =
    0.8716
>> esame21giugno2006esII
grado del polinomio approssimante = 5

err =
    0.5289
>> esame21giugno2006esII
grado del polinomio approssimante = 6 Warning: Matrix is close to
singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.229554e-016.
> In C:\MATLAB6p5\work\corsoCalN\esame21giugno2006esII.m at line 33

err =
    0.6623
>>
```

3. Per determinare "a priori" il numero di punti m richiesti, si può usare la maggiorazione dell'errore data in formula (6.3.11) del testo di Pica. Per determinare m bisogna calcolare $M = \max_{x\in[-1/2,1]} |f''(x)|$ dove

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x - \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(\pi x) + 2\pi \cos(\pi\, x)) \,.$$

Da cui , sapendo che vogliamo l'integrale a meno di $1.e-4$, otteniamo la (sovra)stima

$$m \geqslant \sqrt{\frac{M(b-a)}{12 \cdot 10^{-4}}} \approx 163 \,.$$

Nell'implementazione che segue se si dimezza il passo h ad ogni step i punti calcolati sono 128 altrimenti 100 (se si aumenta ad ogni step di 1). Questa seconda scelta è meno efficiente

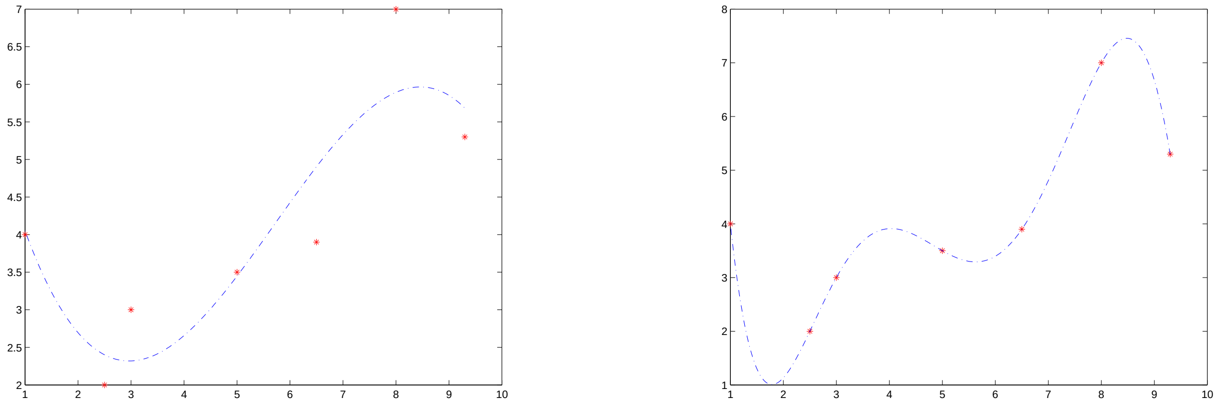

Figure 2: Grafici del polinomio approssimante: sx grado 3, dx grado 6 (i.e. interpolazione).

e meno "precisa". Ricordiamo che $m \geqslant 163$ dato dalla precedente disuguaglianza, stima a priori dando una sovrastima!

```
clear;
%---------------------------------
% Esercizio 3 dell'esame del
% 21/06/06
%---------------------------------
format long a=-1/2; b=1;

realValue=quadl(@funQ,a,b,1.e-4);
xx=a:0.01:b;
yy=funQ(xx);

n=1; h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
fTc=funQ(x);
fTc(2:end-1)=2*fTc(2:end-1);
ValTc=0.5*h*sum(fTc);
erroreT=abs(realValue-ValTc);

while erroreT > 1.e-4,
    n=2*n;
    %n=n+1;
    h=(b-a)/n;
    x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
    fTc=funQ(x);
```

```
    fTc(2:end-1)=2*fTc(2:end-1);
    ValTc=0.5*h*sum(fTc);
    erroreT=abs(realValue-ValTc);
end

plot(xx,yy,'-.g',x,fTc,'o');
        title('Quadratura composita con i trapezi e relativi nodi');
        ValTc
        realValue
        disp('Errore assoluto')
        erroreT
        disp('Numero punti usati ' )
        n

function y=funQ(x)
y=(x.^2-sin(pi*x)).*exp(-x);
return

>> esame21giugno2006esIII
ValTc =
   0.26691955035453
realValue =
   0.26685924657100
Errore assoluto
 erroreT =
    6.030378353205634e-005

Numero punti usati
 n =
   128

>>
```