PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Prof. S. De Marchi

`Verona, 21 dicembre 2005`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Consegnare un floppy con tutti i files/scripts usati per produrre i risultati.

NOTA: non allegate immagini in formato Matlab .fig ma .jpg o .eps.

1. Si considerino le funzioni $f_1(x) = \log(2|x|)$ e $f_2(x) = 1 - k\,x$, k reale.

   (a) Aiutandosi con la grafica, dire quante soluzioni reali hanno le due funzioni per i seguenti valori $k_1 = 2\mathrm{e}^{-2} - 0.1$, $k_2 = k_1 + 0.3$ e $k_3 = 0$.

   (b) Si consideri quindi $k = 1$. Studiare la convergenza dei seguenti metodi di iterazione funzionale all'unica radice α

   (i)
   $$x_{i+1} = 1 - \log(2|x_i|)\ ,$$

   (ii)
   $$x_{i+1} = \frac{1}{2}\exp\left(1 - x_i\right)\ .$$

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & \alpha & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & \alpha \\ \alpha & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\ ,\quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Individuare un intervallo I_α di valori di α in cui la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel è convergente. (*Sugg.*: calcolare al variare di α l' autovalore di di modulo maggiore usando `eig` e quindi ....).

   (b) Preso $\alpha^* \in I_\alpha$, risolvere il sistema $Ax = b$ con b tale che $x = [1, 1, 1]^T$, con il metodo di Gauss-Seidel con $tol = 1.e-6$, determinando anche il numero di iterazioni e come test di arresto sul residuo $r_k = b - Ax_k$, ovvero iterando finchè $\|r_k\| > tol\|b\|$.

3. Si calcoli un'approssimazione di

$$I = \int_{-1}^{2}\left(\frac{5}{2}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + 2\right)dx$$

   con le formule di Newton-Côtes di tipo chiuso con $n \leqslant 4$.

   Ricordo che le formule di Newton-Côtes di tipo chiuso hanno la forma seguente

$$I_{n+1}(f) = \kappa \cdot h \cdot \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j)$$

dove $h = (b-a)/n,\ x_j = a + jh,\ j = 1, ..., n$ e i coefficienti si ricavano della tabella seguente

n	κ	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	1/2	1	1				
2	1/3	1	4	1			
3	3/8	1	3	3	1		
4	2/45	7	32	12	32	7	
5	5/288	19	75	50	50	75	19

Calcolare anche l'errore assoluto commesso rispetto al valore dell'integrale.

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

```
clear
%--------------------------------------
% Esercizio 1: compito del 21/12/05
%--------------------------------------
%
% Parte (a)
% Dapprima faccio i grafici di
% con i valori proposti per il parametro k

k1=2*exp(-2)-0.1;
k2=0.3+k1;
k3=0;

x=-15:0.1:15;
y=log(2*abs(x));
y1=1-k1*x;
y2=1-k2*x;
y3=1-k3*x;

plot(x,y,'r-',x,y1,'b--'); title('Grafico con k1'); pause

plot(x,y,'r-',x,y2,'b--'); title('Grafico con k2'); pause

plot(x,y,'r-',x,y3,'b--'); title('Grafico con k3');

%-----------------------------------------------------------------------
% Parte (b)
% Come proposto scelgo k=1, che essendo maggiore di k1, mi aspetto una sola
% intersezione in alfa. Un intervallo separatore risulta (0,1) come si vede
% immediatamente facendo i grafici di y=x e y=exp(1-x)/2.
%
%
% Primo metodo iterativo
% La funzione d'iterazione  g(x)=1-log(2|x|) che  uguale g(x)=1-log(2x)
% in (0,1). Ora g'(x)=1/(2x)*2=1/x>1 in (0,1). Da cui a priori posso dire
% che il metodo non converge.
%
% Secondo metodo iterativo
% La funzione d'iterazione  g(x)=1/2*exp(1-x) che in (0,1)
% ha derivata g'(x)=-1/2*exp(1-x)<1 in (0,1). Da cui a priori posso dire
% che il metodo converge.
```

```
% Ma questa volta vogliamo calcolare la convergenza
% e qualche altra informazione.
x0=0.0;
kmax=100;

xprev = x0;
xsucc = exp(1-xprev)/2;
k=1;

while( abs(xprev-xsucc) > 1.e-8 & k<=kmax)
    xprev = xsucc;
    xsucc = exp(1-xprev)/2;
    k=k+1;
end

xsucc
```

```
clear
%----------------------------------------
% Esercizio 1I: compito del 21/12/05
%----------------------------------------
%
% -------------------Parte 1

k=1;

for a=-1.99:0.1:1.99
    a1(k)=a;
    A=[-.5 a 0.5; 0.5 -0.5 a; a 0.5 -0.5];
% Costruzione della matrice di iterazione del metodo di G-S.
    d=diag(diag(A));
    e=-(tril(A)-d);
    f=-(triu(A)-d);
    gs=inv(d-e)*f;
    maxEigGS(k)=max(abs(eig(gs)));
    k=k+1;
end

plot(-1.99:0.1:1.99,maxEigGS,'.-')

pause
% ---------------------------------------------------
%Dal grafico risulta che 'a' deve stare in (-1/2, 0]
%----------------------------------------------------
%
% ------------------- Parte 2

% Sia ora a=-0.1.
n=3;
a=-0.1;
A=[-.5 a 0.5; 0.5 -0.5 a; a 0.5 -0.5];
% Matrice di iterazione del metodo di G-S.

d=diag(diag(A));
e=-(tril(A)-d);
f=-(triu(A)-d);
gs=inv(d-e)*f;
```

```
% Costruzione del termine noto
xx=ones(3,1);
b=A*xx;
q=inv(d-e)*b;

% Iterazioni ..........

x0=zeros(n,1);
x1=gs*x0+q;
r0=b-A*x0;
r=b-A*x1;
k=1;
err(k)=norm(xx-x1);
rr(k)=norm(r)/norm(r0);

while(norm(r) > 1.e-6*norm(b) & k <= 1000)
    x0=x1;
    x1=gs*x0+q;
    r=b-A*x1;
    k=k+1;
    err(k)=norm(xx-x1);
    rr(k)=norm(r)/norm(r0);
end;
semilogy(1:k,err,'r-',1:k,rr,'b-.');
legend('Errore','Residuo normalizzzato')
```

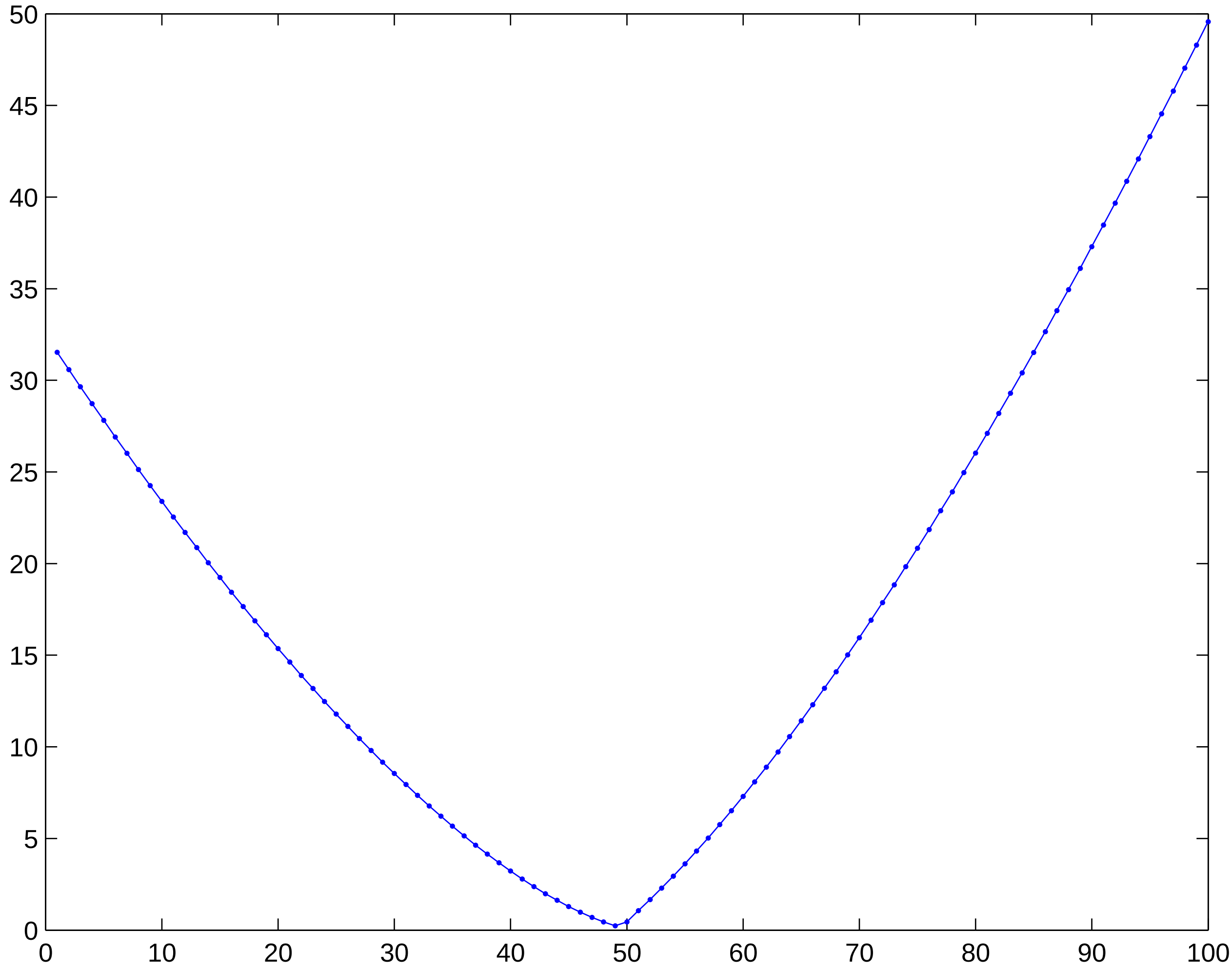

Figure 1: Ese2-parte1, Raggio spettrale della matrice di Gauss-Seidel al variare di a

```
clear;
% Esercizo 3: compito del 21/12/05

k=[1/2 1/3 3/8 2/45 5/288];

c=[1 1 0 0 0 0
   1 4 1 0 0 0
   1 3 3 1 0 0
   7 32 12 32 7 0
   19 75 50 50 75 19]
```

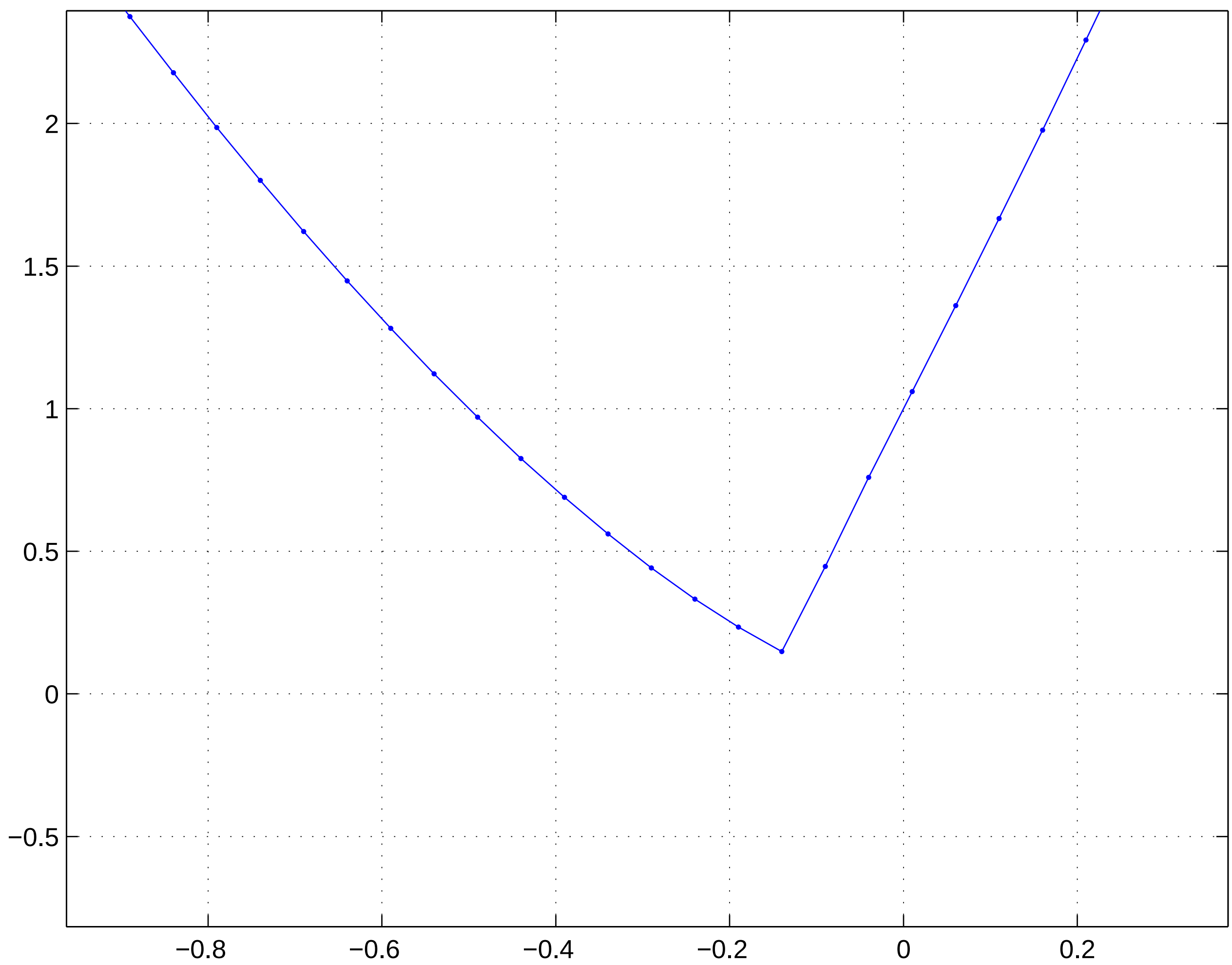

Figure 2: Ese2-parte1, zoom della figura precedente

```
a=-1; b=2; Vvero=-5.6260;

for n=1:5,
    h=(b-a)/n;
   for j=1:n+1
    x(j)=a+(j-1)*h;
  end
   fval=5/2*x.^4-15/2*x.^3+2;
   Vint=k(n)*h*sum(c(n,1:n+1)*fval');
   err(n)=abs(Vint-Vvero)
end
```

```
% Errori calcolati

err =

  Columns 1 through 4

   3.37400000000000   5.06350000000000   2.25100000000000   0.00100000000000

  Column 5

   0.00100000000000
```

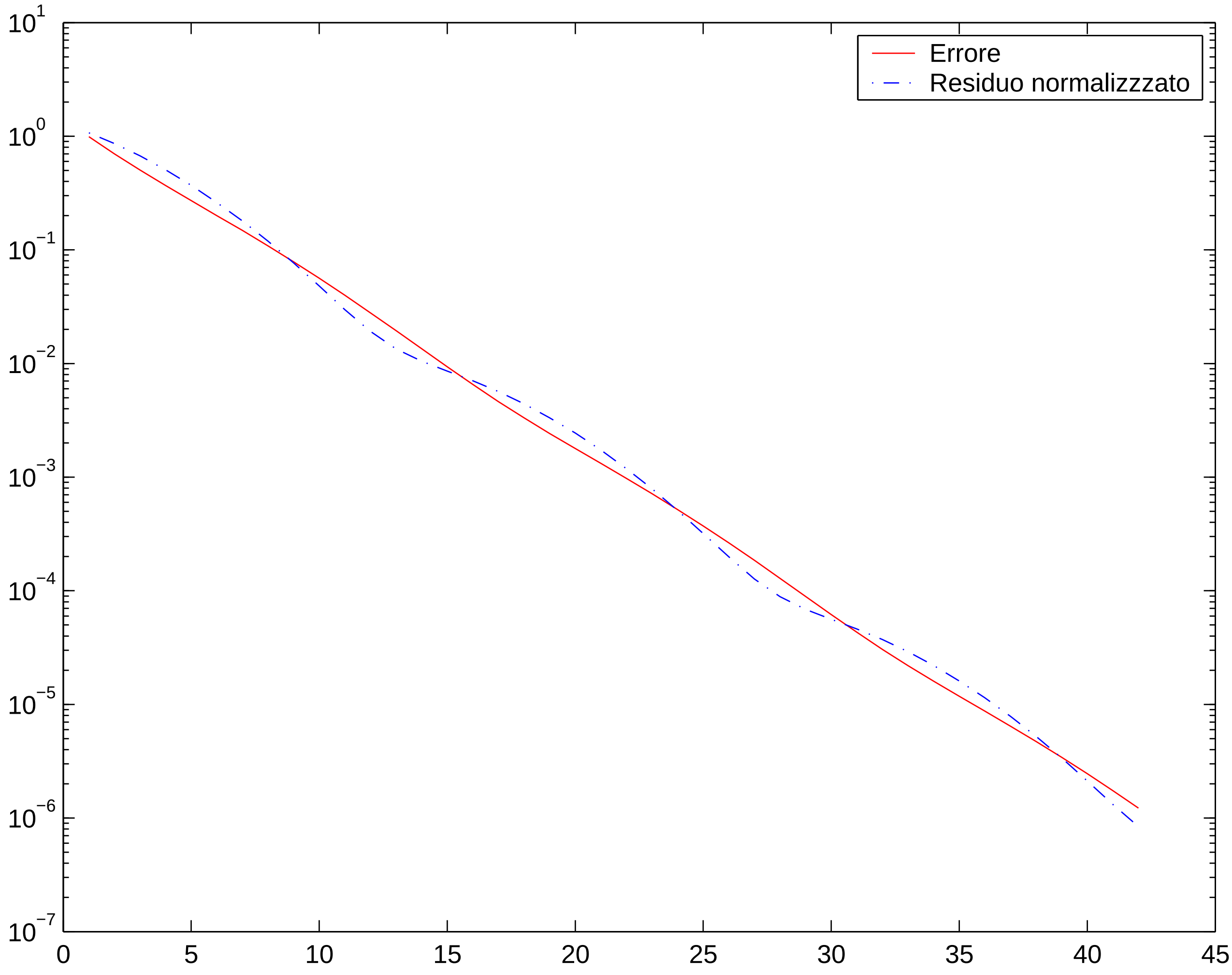

Figure 3: Ese2-parte2, Errore e residuo