PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Prof. S. De Marchi

Verona, 26 settembre 2005

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Consegnare un floppy con tutti i files/scripts usati per produrre i risultati.

NOTA: non allegate immagini in formato Matlab .fig ma .jpg o .eps.

1. Si consideri la funzione $f(x) = (x^2 - 1)^p \log(x),\ p \geq 1,\ x > 0$ che ha in $\alpha = 1$ una radice multipla di molteplicità $m = p + 1$. Nei casi $p = 2, 4, 6$, si determini α con i due seguenti metodi a meno di $tol = 1.e - 8$ partendo da $x_0 = 0.8$.

   (a)
   $$x_{k+1} = x_k - m_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k \geq 2 \quad \text{con} \quad m_k = \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2x_{k-1} - x_k - x_{k-2}}\ . \tag{1}$$

   (b)
   $$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ .$$

   Per ciascun metodo si determini il numero di iterazioni necessarie. Nel caso del primo metodo si faccia vedere che la formula per m_k in (1) fornisce anche una stima della molteplicità di α.

2. Dati i sistemi lineari $A_1 x = b$ e $A_2 y = b$ con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 13 & 18 & 23 & 28 \\ 3 & 18 & 50 & 62 & 74 \\ 4 & 23 & 62 & 126 & 148 \\ 5 & 28 & 74 & 148 & 255 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

   e il termine noto
   $$b = [\mathtt{15,\ 18,\ 18,\ 15,\ 9}]^{\mathtt{T}}.$$

   (a) Risolvere i due sistemi con un opportuno metodo diretto.

   (b) Sia $\delta b = \mathtt{rand(5,1)} * \mathtt{1.e} - \mathtt{3}$ una perturbazione del vettore b. Si risolvano ora i due sistemi perturbati $A_1 x = b + \delta b$ e $A_2 y = b + \delta b$. Confrontando le nuove soluzioni con quelle ottenute al punto precedente, dire quale sistema risulta meglio condizionato analizzando la quantità
   $$\frac{\|E_x^{rel}\|_2}{\|E_b^{rel}\|_2}\ ,$$
   dove E^{rel} indica l'errore relativo .

(c) Verificare la correttezza della risposta, in (b), dopo aver calcolato $B = A_2^T A_2$ e confrontato i numeri di condizionamento in norma 2 di B e A_1.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \log(2+x) \ , \quad x \in [-1,1] \ .$$
Indichiamo con p_n il polinomio di interpolazione di grado $\leq n$ costruito usando i punti
$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right), \ k = 0,1,...,n$$
noti come *punti di Chebysehv*. Sotto tale ipotesi, è noto che l'errore di interpolazione si può maggiorare come segue:
$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} 2^{-n} \ . \tag{2}$$
(a) Nel caso $n = 4$, si determini una maggiorazione dell'errore usando la (2).

(b) Nel caso in cui il polinomio di interpolazione, sia invece scrivibile in forma in Taylor come
$$t_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ , \tag{3}$$
l'errore nel generico punto x si esprime come
$$f(x) - t_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \ , \quad -1 < \xi < 1 \ .$$
Determinare una maggiorazione di
$$\|f - t_4\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - t_4(x)| \ ,$$
e confrontare il risultato con quello ottenuto nel caso dei punti di Chebyshev.

(c) *Facoltativo*: Plottare in un unico grafico, $f(x)$, $p_4(x)$ e $t_4(x)$.

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

```
clear
%----------------------------------------
% Esercizio 1: compito del 26/9/05
%----------------------------------------
global p

p=input('dammi p ' );
tol=1.e-8;
x0=0.8;
kmax=100;

% Stringhe delle funzioni

fun=@fun26_9;

dffun=@dfun;

% Parte (a). Implemento i calcoli usando la formula (1) per m_k

xv(1)=x0; k=0; m=[1]; err=tol+1; r=[1];

while(k <= kmax) & (err > tol)
    k=k+1;
    x=xv(k);
    f(k)=feval(fun,x);
    df=feval(dffun,x);
    if df==1, disp('Arresto per annullamento dfun ');
        return;
    end;

    x=x-m(k)*f(k)/df;
    xv=[xv;x];
    f=[f;feval(fun,x)];
    errOld=err;
    err=abs(xv(k+1)-xv(k));
    rnew=err/errOld;
    r=[r;rnew];
    if r(k+1) >1.e-5 & abs(rnew-r(k)) < 1.e-5,
        m(k+1)=max(m(k),1/abs(1-r(k+1)));
    else
        m(k+1)=m(k);
```

```
    end
end

disp('PARTE (a)')

disp('soluzione = ')

x

disp ('approssimazione della molteplicit ')

m(end)

disp(' numero di iterazioni ')

k


% Parte (b).

% Molteplicit

molt=p+1;

xv=x0; k=0; err=tol+1; while(k <= kmax) & (err > tol)
    k=k+1;
    x=xv(k);
    f(k)=feval(fun,x);
    df=feval(dffun,x);
    if df==1, disp('Arresto per annullamento dfun ');
        return;
    end;

    x=x-molt*f(k)/df;
    xv=[xv;x];
    f=[f;feval(fun,x)];
    err=abs(xv(k+1)-xv(k));
end

disp('PARTE (b)')

disp('soluzione = ')
```

```
x
disp(' numero di iterazioni ')
k




clear
%
% Esercizio 2: compito del 26/9/05
%

A1=[1 2 3 4 5; 2 13 18 23 28; 3 18 50 62 74; 4 23 62 126 148;
    5 28 74 148 255];
A2=[ 1 2 3 4 5; 0 3 4 5 6; 0 0 5 6 7; 0 0 0 7 8; 0 0 0 0 9]; b=[15;
18;18;15;9];

% Risolvo il primo sistema con un metodo diretto (A1  simm. def +)
% il metodo diretto opportuno  Choloesky. Usando la funzione \
% di Matlab ho proprio la fattorizzazione di Choleski.

x=A1\b;

% Risolvo il secondo sistema: la matrice  gi in forma
% triangolare superiore, basta fare una sostutuzione all'indietro
% e Matlab lo fa usando ancora la funzione \

y=A2\b;



% Perturbo il vettore b

b1=b+rand(5,1)*(1.e-3);

% Risolvo il primo sistema
x1=A1\b1

% Risolvo il secondo sistema

y1=A2\b1

rb=norm(b1-b)/norm(b); Ex=(norm(x1-x)/norm(x));
```

```
Ey=(norm(y1-y)/norm(y)); K1=Ex/rb K2=Ey/rb

C1=cond(A1)

C2=cond(A2)

% Osservo subito che A2'*A2=A1 e quindi C2^2=C1.

% Quindi il sistema A2*y=b risulta meglio condizionato poich
% A2 ha numero di condizionamento che corrisponde alla radice di
% quello di A1. Difatti, K1<K2.



clear;
%-----------------------------
% Terzo esercizio: 26/9/05
%-----------------------------

% Parte (a)

% Per calcolare una maggiorazione dell'errore, come da formula (2)
% devo calcolare f5(x)=f^(5)(x), la derivata 5^a, della funzione log(x+2).
% Tale derivata :
%                 f5(x)=24/(x+2)^5
%
% Ora f5(x)  strettamente decrescente in [-1,1], quindi
% il massimo in valore assoluto, cio la norma infinito, si ha quando
% x=-1 e tale massimo M=24.
%
% Pertanto la stima richiesta in (2) :
%
% ||f - p_4|| <= M/5!* 2^(-4)= 24/(120*16)=1/80=0.0125


% Parte (b)

% In questo caso la formula dell'errore corrisponde a
%
% ||f-t_4||<= M/5! max_(-1 <= x <= 1)(abs(x^5))
%
% Cerchiamo il max_(-1 <= x <= 1)(abs(x^5))
% Ma x^5  strettamente crescente e dispari in [-1,1], il massimo
```

```
% in modulo  assunto agli estremi -1 e 1 e vale 1^5=1.

% In conclusione:
%
%  ||f-t_4||<= M/5!= 24/120= 1/5=0.2
%
% Quindi l'errore d'interpolazione con i nodi di Chebyshev  pi piccolo
% essendo 0.0125 < 0.2

% Parte facoltativa

% Per determinare i polinomi p_4 e t_4 uso le seguenti cose

% nodi di Chebyshev
xc=cos((2*[0:4]+1)*pi/(2*5));
% valori della funzione nei nodi
fc=log(xc+2);
xi=-1:0.1:1;
ch=interp1(xc,fc,xi);


% Coefficienti del polinomio di Taylor come da formula (3)
% nota: i coeff sono stati messi in ordine inverso per
% applicare la funzione polyval
c=[-3/8/24,1/4/6,-1/4/2,1/2,log(2)]
ta=polyval(c,xi);

% Valori della funzione

y=log(xi+2);


plot(xi,y,'r-',xi,ch,'b.-',xi,ta,'k:')

legend('funzione','chebyshev','taylor')
```

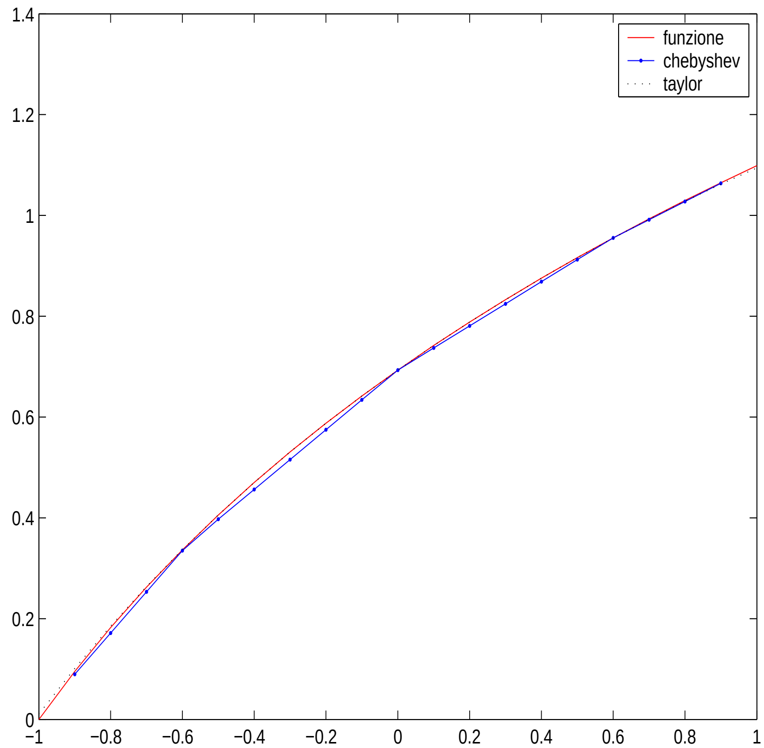

Figure 1: La funzione e i due polinomi d'interpolazione in $[-1, 1]$.