PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

Prof. S. De Marchi

`Verona, 29 settembre 2006`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. I fogli saranno forniti da chi fa assistenza. **Consegnare fogli leggibili!**. Consegnare un floppy con tutti i files/scripts usati per produrre i risultati **oppure** inviare una email a **stefano.demarchi@univr.it** o **demarchi@sci.univr.it**.
NOTA: allegate immagini in formato .jpg o .eps.

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^3 - \frac{1}{2}x + 1}{1 + x^2} - 1\,. \tag{1}$$
   (a) Quante radici reali ha l'equazione $f(x) = 0$ in $[-2, 2]$?
   (b) Si costruisca un opportuno metodo iterativo convergente ad una delle suddette radici partendo da $-\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1}{2}$.
   (c) Si implementi detto metodo usando $tol = 1.e - 6$ e test sull'errore relativo.

2. Si costruisca il polinomio d'interpolazione di grado 5 in forma di Newton che interpoli la funzione (1) su $[-2, 2]$ usando nodi di Chebyshev $x_i^c = \cos(k\pi/5), \quad k = 0, ..., 5$ (punti appartenenti a $[-1, 1]$). Si determini anche computazionalmente l'errore d'interpolazione in norma infinito.

3. Approssimare a meno di $tol = 10^{-6}$ l'integrale
$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1 + 5x^2} dx$$
usando la formula dei trapezi composita. Quindi si stimi il punto ξ (che appare nella formula della stima dell'errore di quadratura) cosicché l'errore calcolato risulta essere minore di tol.

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

1.

```
clear;
%----------------------------------
% Esercizio 1 del 29/9/2006
%----------------------------------

% (a) La funzione data ha 3 radici reali
% Infatti, la funzione si riscrive come
%
%          f(x)=x(x^2-x-1/2)/(1+x^2)  (1)
%
% Risolvendo f(x)=0, si hanno le radici x_1=0, x_2=(1 - \sqrt{3}) /2 e
% x_3=(1+\sqrt{3})/2

% (b) Da f(x)=0, otteniamo un metodo iterativo x_k=x_{k-1}^2-1/2, k=1,2,....
% la cui funzione d'iterazione, g(x)=x^2-1/2,  tale che g'(x)=2x. Quindi
% se -1/2<x<1/2 allora |g'(x)=2x|<1 che implica la convergenza ad una delle
% radici di h(x)=x^2-x-1/2, ovvero x_3. Infatti g'(x_2)=1+sqrt(3)>1 mentre
% |g'(x_3)|=|1-sqrt(3)|<1.
%
% (c) Implementiamo ora il metodo iterativo
x=input('Valore iniziale = ');
x1=x^2-1/2;
e(1)=abs(x-x1);
i=1;
while(abs(x-x1)>1.e-6*abs(x1) & i<100)
    x=x1;
    x1=x^2-1/2;
    i=i+1;
    e(i)=abs(x-x1)/abs(x1);
end
x1
i-1
semilogy(1:length(e),e,'-o');
legend('errore RELATIVO');
```

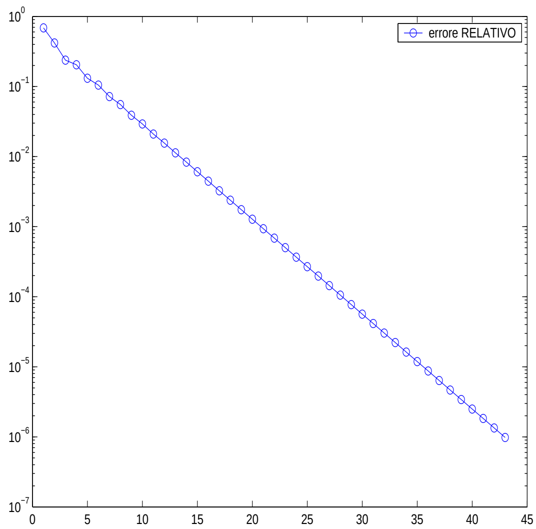
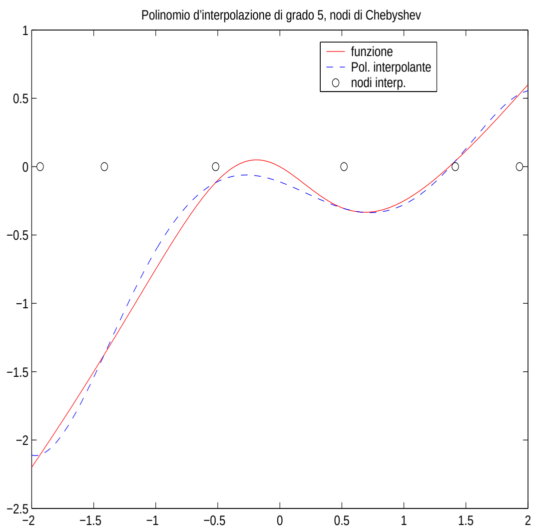


Figure 1: Grafico dell'errore relativo al metodo iterativo dell'Esercizio 1.

2.

```
clear;
%--------------------------------------
% Esercizio 2 dell'esame del 29/9/2006
%--------------------------------------
%---------------------------------------------------
% Interpolante in forma di Newton
%---------------------------------------------------
clear a=input('estremo sx = ');
b=input('estremo dx = ');
n=input('grado polinomio di interpolazione = ');

xx=a:0.01:b;  % target points
yy=fun(xx);   % i valori della funzione sui targets
 x=-(b-a)/2*cos((2*[1:n+1]-1)*pi/(2*(n+1)))+(b+a)/2;
 titlestring=['Polinomio d''interpolazione di grado ', num2str(n),', nodi di Chebyshev'

    y=fun(x);
    d=diffDivise(x,y);
    p=horner(x,d,xx);
    plot(xx,yy,'-r',xx,p,'--b',x,zeros(1,length(x)),'ok')
    legend('funzione','Pol. interpolante','nodi interp.');
    title(titlestring);
```

```
  % -----------------------
  % Calcolo dell'errore
  %--------------------------

  err=norm(yy-p,inf);

err

function [y,yp]=fun(x) global p
% Funzione del 29/9/06
 y=(x.^3-1/2*x+1)./(1+x.^2)-1;
return

>> esame29settembre2006esII
estremo sx = -2
estremo dx = 2
grado polinomio di interpolazione = 5

err =

    0.1398
```



3.
```
clear;
%-----------------------------------
% Esercizio 3 del 29/9/2006
%-----------------------------------
```

```
n=1; a=-1; b=1; h=(b-a)/n; tol=1.e-6;
x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
xx=a:0.01:b; yy=funQ(xx); realValue=quadl(@funQ,a,b,1.e-6);
fTc=funQ(x); ValTc=h/2*(fTc(1)+fTc(end))+h*sum(fTc(2:end-1));
erroreT=abs(realValue-ValTc)
% Formula dei trapezi composita

while erroreT > tol,
        n=n*2;
        h=(b-a)/n;
        x=linspace(a,b,n+1); %punti equispaziati.
        fTc=funQ(x);
        plot(xx,yy,'-.g',x,fTc,'o');
        ValTc=h/2*(fTc(1)+fTc(end))+h*sum(fTc(2:end-1));
        title('Quadratura composita con i trapezi e relativi nodi');
        disp('Errore assoluto');
        erroreT=abs(realValue-ValTc)
    end

 n
 erroreT

 % Stimo il punto xi

 v=tol*12*n^2/(b-a)^3;
 for i=1:length(x),
     yv(i)=v;
 end

 % funzione derivata
 yd=exp(x).*(-9+160*x.^2+25*x.^4-20*x-100*x.^3)./(1+5*x.^2).^3;

 plot(x,yv,'-', x,abs(yd),'--');
 % Dal grafico (vedi sotto) risulta che, ad esempio, xi=0.34 oppure xi=0.38
 % o anche xi=-0.185, xi=-0.165 sono quattro possibili stime
 % dove la f'' risulta maggiore del valore v.



>> esame29settembre2006esIII

n =
```

```
   512


erroreT =

  5.9201e-007
```

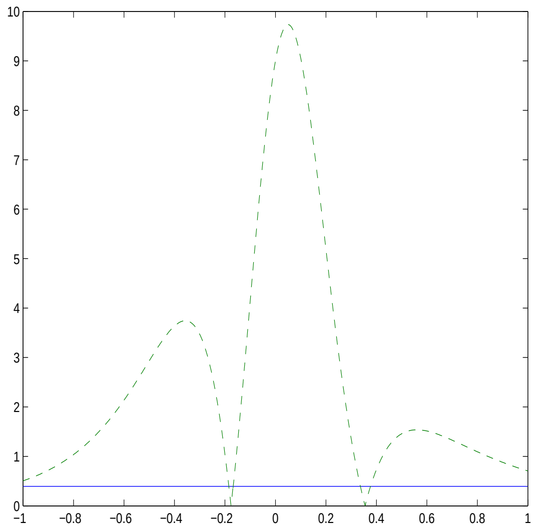


Figure 2: Grafico del modulo della derivata seconda