LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Sistemi lineari: II

Università di Verona

Dott. S. De Marchi

`Verona, 1 dicembre 2004`

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Provare graficamente, nel piano $(\alpha, \rho(\alpha))$, che se $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ il metodo di Gauss-Seidel è convergente mentre quello di Jacobi non lo è.

Sia ora $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\mathbf{b} = [1 \ -1 \ 3]'$. Risolvere il sistema $Ax = b$ con Gauss-Seidel: calcolando anche il numero di iterazioni.

2. Data la matrice tridiagonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} d & -1 & & \\ -1 & d & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & d \end{pmatrix}$$

con $d \geq 2$ si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un vettore assegnato, con un metodo iterativo. Valutando la norma euclidea della differenza tra due iterate successive, ovvero

$$\delta_{k+1} = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \ ,$$

si presentano nella tabella seguente i valori, nei casi $d = 2$ e $d = 3$ rispettivamente, di alcune differenze:

	d=2		d=3
	⋮		⋮
456	7.2754e-3	16	1.0229e-4
457	7.2616e-3	17	6.5117e-5
458	7.2477e-3	18	4.1563e-5
459	7.2340e-3	19	2.6593e-5

(a) Si stimi in norma 2, il numero di iterazioni m necessarie nei casi $d = 2$ e $d = 3$ affinchè la differenza $\|\mathbf{x}^{k+m} - \mathbf{x}^{k+m-1}\| \leq 1.e - 9$ partendo da $k = 458$ e $k = 18$, rispettivamente. (*Sugg.*: È noto che

$$\delta_{k+1} \leq C_k \delta_k$$

con C_k la norma 2 della matrice d'iterazione al passo k. Usando i valori tabulati, dapprima si determini un' approssimazione di C_k nei due casi $d = 2$ e $d = 3$ e quindi iterando ...)

(b) Scrivere inoltre un programma Matlab che risolve il sistema precedente usando il metodo di Jacobi, prendendo come dati in ingresso d, n, b, tol, senza allocare la matrice A e la matrice di iterazione di Jacobi, partendo da $\mathbf{x}^0 = 0$. Lo si applichi nel caso $d = 3$, $n = 10$, **b**=`ones(n,1)` e $tol = 1.e-9$.

$\Diamond\Diamond$

Tempo massimo: 2 ore.