# LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

**Sistemi lineari: III**

*Università di Verona*

*Dott. S. De Marchi*

`Verona, 10 gennaio 2005`

I metodi iterativi, per la soluzione di un sistema lineare $Ax = b$, teoricamente richiedono un numero infinito di iterazioni. Nella pratica ciò non è ragionevole poiché invece che $x$ ci si accontenta di una sua approssimazione $\tilde{x}$ o più concretamente di $x^k$, l'iterata ad un certo passo $k$ del metodo, per la quale l'*errore* sia inferiore ad una prescelta tolleranza $\epsilon$. Ma l'errore è a sua volta una quantità incognita perchè dipende dalla soluzione *esatta*. Nella pratica ci si rifà a degli stimatori dell'errore *a posteriori*.

1. Un primo stimatore è il **residuo** ad ogni iterazione

   $$r^k = b - Ax^k \,.$$

   In tal caso si arresteremo in corrispondenza a quel $k_{min}$ tale che

   $$\|r^{k_{min}}\| \le \epsilon \|b\| \,.$$

   Da cui, l'errore relativo

   $$\frac{\|x - x^{k_{min}}\|}{\|x\|} = \frac{\|e^{k_{min}}\|}{\|x\|} \le \epsilon \kappa(A) \,.$$

   Perció, il controllo sul residuo ha senso solo se $\kappa(A)$, il numero di condizionamento della matrice $A$, è ragionevolmente piccolo.

2. Alternativamente si può calcolare il cosidetto *incremento* $\delta^k = x^{k+1} - x^k$. In tal caso il metodo si arresterà al passo $k_{min}$ per cui

   $$\|\delta^{k_{min}}\| \le \|b\| \,.$$

   Nel caso in cui la matrice di iterazione $P$ (non la matrice del sistema!) è simmetrica e definita positiva, si otterrà

   $$\|e^k\| = \|e^{k+1} - \delta^k\| \le \rho(P)\|e^k\| + \|\delta^k\| \,.$$

   Per la convergenza, $\rho(P) < 1$, avremo alla fine

   $$\|e^k\| \le \frac{1}{1 - \rho(P)} \|\delta^k\| \,. \qquad (1)$$

   Nota: anche se $P$ non è simmetrica e definita positiva si arriva alla stessa conclusione ma non vale la (1). In conclusione: il controllo sull'incremento ha senso solo se $\rho(P) \ll 1$.

◊◊

**A.** Come applicazione di quanto prima detto al punto 1, consideriamo `A= hilb(20)`, con `b` tale che `x=ones(20,1)`. Ora `A` è simmetrica e definita positiva, quindi il metodo di Gauss-Seidel (o semplicemente G-S) converge. Partendo da `x0=zeros(20,1)` e `tol=1.e-5` sul residuo, si determini il numero di iterazioni necessarie a che il metodo di GS converga (test sul residuo come spiegato sopra). Si calcoli anche la norma dell'errore. Si riporti poi su un grafico l'andamento del residuo relativo (ovvero il residuo diviso per il residuo iniziale) e dell'errore al variare del numero delle iterazioni.

**B.** Come applicazione di quanto prima detto al punto 2, sia `A` $50 \times 50$ tridiagonale con elementi sulla diagonale pari a 2.001 e quelli extradiagonali uguali a 1. Al solito `b` tale che `x=ones(50,1)`. Essendo `A` diagonalmente dominante in senso stretto, il metodo di G-S avrà velocità di convergenza doppia di quello di Jacobi. Usando come criterio di arresto il test sull'incremento, si determini la soluzione di detto sistema usando `x0=zeros(50,1)` e `tol=1.e-5`. In quante iterazioni il metodo di G-S converge? Qual è l'errore commesso ? Si spieghino questi comportamenti.

Provare poi a rifare lo stesso esercizio ma con elementi diagonali uguali a 3.2. Che cosa si ottiene?

Tutte le norme considerate sono quelle euclidee (norma 2). **Tempo massimo: 2 ore.**