LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Interpolazione di funzioni: I

Università di Verona

Dott. S. De Marchi

`Verona, 14 febbraio 2005`

1 Interpolazione di funzioni e fenomeno di Runge

Si consideri la funzione di Runge

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5] \, . \tag{1}$$

Sugli n punti equispaziati $x_i = -5 + (i-1)h, \; i = 1, ..., n, \quad h = 10/(n-1)$ il polinomio d'interpolazione di grado $n-1$, $p_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1$, è noto che si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$V\,\mathbf{a} \; = \; \mathbf{y} \, ,$$

con $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)^T$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$ (qui $y_i = g(x_i)$) e V la *matrice di Vandermonde* i cui elementi sono $v_{ij} = x_i^{j-1}$.

Diversamente, si può esprimere il polinomio di interpolazione $p_{n-1}(x)$ in *forma di Newton*,

$$p_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + b_n(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \, ,$$

dove b_i rappresenta la differenza divisa di ordine i della funzione $g(x)$.

1. Per determinare i coefficienti $b_i, \; i = 1, ..., n$ possimo implementare l'*algoritmo delle differenze divise.*

```
%--------------------------------------------------
% Algoritmo delle differenze divise
%
% Inputs
% x: vettore dei punti di interpolazione,
% y: vettore dei valori della funzione.
% Output
% b: vettore delle differenze divise b=[b_1,....b_n]
%--------------------------------------------------
b=y;
 for i=1:n,
  if i~=1,
    for j=2:i,
       b(i)=(b(i)-b(j-1))/(x(i)-x(j-1));
    end;
  end;
 end;
```

2. Il valore del polinomio p_{n-1} in x, si determina con lo *schema di Hörner*:

$$\begin{aligned} p &= b_n; \\ p &= (x - x_i)p + b_i, \quad i = n-1, ..., 1 \end{aligned} \tag{2}$$

3. L' errore di interpolazione si può esprimere mediante la formula

$$E_n(g) = g(x) - p_n g(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \,.$$

   Se $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, si dimostra che

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_1, ..., x_{n+1}, x]\,. \tag{3}$$

(i) Implementare come M-functions gli algoritmi 1. e 2. Fare quindi un programma Matlab che valuti e disegni la funzione $g(x)$ e il polinomio di interpolazione di gradi variabili da n=2 a n=15. Che fenomeno si osserva per $n > 11$? Calcolare anche l'errore d'interpolazione in un punto $x \neq x_i$ e $x \in [-5, 5]$ mediante la formula (3).

(ii) Costruire il polinomio di interpolazione sui punti di *Chebyshev* in $[-5, 5]$

$$x_i = 5 \ \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, .., n$$

e confrontare i risultati con il caso (i).

2 Algoritmo di Neville

Si implementi in `Matlab` l'algoritmo di *interpolazione iterativa di Neville*.

I dati del problema sono: a, b estremi dell'intervallo di interpolazione, n il numero dei nodi di interpolazione, x, y array di dimensione n che contengono i nodi equispaziati e il valore della funzione $f(x)$ nei nodi, ovvero $x_i = a + (b-a)\frac{i-1}{n-1}$, $i = 1, ..., n$ e $y_i = f(x_i)$, il punto $t \in [a, b]$ su cui valutare il polinomio interpolante.

Il polinomio interpolante in t è ottenuto con la formula seguente:

$$\begin{aligned} p_i^{(0)} &= y_i, \quad i = 1, ..., n; \\ p_i^{(k)} &= \frac{p_{i+1}^{(k-1)}(t - x_i) - p_i^{(k-1)}(t - x_{i+k})}{x_{i+k} - x_i}, \quad k = 2, ..., n-1, \ \ i = 1, ..., n-k. \end{aligned}$$

Si valuti il polinomio di Neville di grado $n - 1$, interpolante la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{(1 + e^x)}, \quad x \in [0, 2\pi], \tag{4}$$

su alcuni punti dell'intervallo e si determini anche l'errore (con segno) nei punti d'interpolazione.

Fare il grafico della funzione e dell'interpolante di Neville.

⋄◊⋄

Tempo massimo: 2 ore.