LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Interpolazione di funzioni: II

Università di Verona

Dott. S. De Marchi

`Verona, 21 febbraio 2005`

1 Interpolazione con splines cubiche

Data la funzione $f(x)$ in un intervallo $I = [a, b]$ della retta reale. Si prenda una partizione di I (non necessariamente equispaziata) $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

È noto che il problema di interpolazione con una spline *cubica*, che denoteremo con $s(x)$, è equivalente alla soluzione di un sistema lineare $A \cdot \mathbf{m} = \mathbf{d}$ con A matrice tridiagonale simmetrica, definita positiva e diagonalmente dominante. Il vettore $\mathbf{m}$, soluzione di detto sistema, è l'*insieme dei momenti*, ovvero

$$m_i = s''(x_i)\,,$$

cioè il valore della derivata seconda della spline cubica nel punto d'interpolazione.

Implementare in Matlab il problema di interpolazione con *spline cubica vincolata* per interpolare $f(x) = 1/(1 + x^2)$ su $[-5, 5]$. Ciò significa che oltre ai valori della funzione $f(x)$ nei nodi, si vorrà che valgano le condizioni

$$s'(a) = f'(a)\ ,\ \ s'(b) = f'(b)\ .$$

Per facilitare l'implementazione osserviamo che le cose note sono il vettore $\mathbf{x}$ dei nodi della partizione, il vettore $\mathbf{y}$ tale che $y_i = f(x_i)$, i valori $y'_1 = f'(a)$ e $y'_n = f'(b)$.

I passi implementativi sono i seguenti.

1. Costruire il vettore $\mathbf{d}$ e la matrice A nel seguente modo.

   - Costruire il vettore $\mathbf{h}$, tale che $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, i = 1, \ldots, n - 1$.
   - Costruire il vettore $\mathbf{d}$, tale che

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_2} - y'_1, \\ d_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},\ i = 2, \ldots, n-1 \\ d_n &= y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\,. \end{aligned}$$

   - Costruire la matrice A, tridiagonale simmetrica.

$$A_{1,1} = \frac{h_2}{3},\ \ A_{n,n} = \frac{h_n}{3}$$

e

$$A_{i,i+1} = \frac{h_{i+1}}{6},\ A_{i,i-1} = \frac{h_i}{6},\ A_{i,i} = \frac{(h_i + h_{i+1})}{3},\quad i = 2, ..., n-1\ .$$

Infine $A_{1,2} = A_{2,1}$ e $A_{n,n-1} = A_{n-1,n}$.

2. Risolvere il sistema $A \cdot \mathbf{m} = \mathbf{d}$.

3. Visualizzare i punti (x_i, y_i), $\quad i = 1, ..., n$ e la spline interpolante che nell'intervallo $x_k \leq t < x_{k+1}$, $\quad k = 1, \ldots, n-1$ è un polinomio cubico definito come

$$s(t) = \frac{(x_{k+1} - t)^3 m_k + (t - x_k)^3 m_{k+1}}{6h_{k+1}} + C\ (x_{k+1} - t) + D$$

dove le costanti C, D sono definite dalle formule

$$C = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{h_{k+1}(m_{k+1} - m_k)}{6} \quad D = y_k - \frac{h_{k+1}^2 m_k}{6}\ .$$

Infine per la ricerca dell'intervallo a cui appartiene il generico punto t, si può fare una ricerca binaria sul vettore $\mathbf{x}$ dei nodi di interpolazione, mediante il codice

```
sx=1; dx=n;
 while dx >sx+1,
     meta=floor((sx+dx)/2);
     if (t < x(meta))
         dx=meta;
     else
         sx=meta;
     end
 end
 k=sx;
```

Come diventa il sistema quando le due condizioni aggiuntive sono $m_1 = m_n = 0$ (caso delle *spline naturali*)? *Sugg.*: il sistema non è più di ordine n ma di ordine $n-1$.

Verificare inoltre il seguente fatto. Quando $f \in \mathcal{C}^4[a, b]$, ed esiste una costante γ tale che $h/h_i \leq \gamma < \infty$ per $h \to 0$, dove $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$, allora

$$\|f^{(p)} - s^{(p)}\|_\infty = \mathcal{O}(h^{4-p}),\ \ p = 0, 1, 2, 3.$$

⋄♢⋄

Tempo massimo: 2 ore.