LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Sistemi lineari: metodi iterativi

Università di Verona

Dott. S. De Marchi

`Verona, 23 gennaio 2006`

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

   Provare graficamente, nel piano $(\alpha, \rho(\alpha))$, che se $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ il metodo di Gauss-Seidel è convergente mentre quello di Jacobi non lo è.

   Sia ora $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\mathbf{b} = [1\ \ -1\ 3]'$. Risolvere il sistema $Ax = b$ con Gauss-Seidel: calcolando anche il numero di iterazioni.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & \alpha & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & \alpha \\ \alpha & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Individuare un intervallo I_α di valori di α in cui la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel è convergente. (*Sugg.*: calcolare al variare di α l' autovalore di modulo maggiore usando `eig` e quindi ....).

   (b) Preso $\alpha^* \in I_\alpha$, risolvere il sistema $Ax = b$ con b tale che $x = [1, 1, 1]^T$, con il metodo di Gauss-Seidel con $tol = 1.e-6$, determinando anche il numero di iterazioni e come test di arresto sul residuo $r_k = b - Ax_k$, ovvero iterando finchè $\|r_k\| > tol\|b\|$.

3. Data la matrice tridiagonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} d & -1 & & \\ -1 & d & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & d \end{pmatrix}$$

   con $d \geq 2$ si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un vettore assegnato, con un metodo iterativo. Valutando la norma euclidea della differenza tra due iterate successive, ovvero

$$\delta_{k+1} = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| ,$$

   si presentano nella tabella seguente i valori, nei casi $d = 2$ e $d = 3$ rispettivamente, di alcune differenze:

	d=2		d=3
	⋮		⋮
456	7.2754e-3	16	1.0229e-4
457	7.2616e-3	17	6.5117e-5
458	7.2477e-3	18	4.1563e-5
459	7.2340e-3	19	2.6593e-5

(a) Si stimi in norma 2, il numero di iterazioni m necessarie nei casi $d = 2$ e $d = 3$ affinchè la differenza $\|\mathbf{x}^{k+m} - \mathbf{x}^{k+m-1}\| \leq 1.e-9$ partendo da $k = 458$ e $k = 18$, rispettivamente. (*Sugg.*: È noto che

$$\delta_{k+1} \leq C_k \delta_k$$

con C_k la norma 2 della matrice d'iterazione al passo k. Usando i valori tabulati, dapprima si determini un' approssimazione di C_k nei due casi $d = 2$ e $d = 3$ e quindi iterando ...)

(b) Scrivere inoltre un programma Matlab che risolve il sistema precedente usando il metodo di Jacobi, prendendo come dati in ingresso d, n, b, tol, senza allocare la matrice A e la matrice di iterazione di Jacobi, partendo da $\mathbf{x}^0 = 0$. Lo si applichi nel caso $d = 3$, $n = 10$, **b**=`ones(n,1)` e $tol = 1.e-9$.

◊◊

Tempo massimo: 2 ore. Il terzo esercizio lo si lascia come esercizio per casa.