

LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Autovalori di matrici: I

Università di Verona

Dott. S. De Marchi

Verona, 24 gennaio 2005

Data una matrice quadrata A $n \times n$, a coefficienti reali, i cui autovalori possono essere ordinati come segue:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Sia \mathbf{x}_1 l'autovettore corrispondente a λ_1 . Se gli autovettori di A sono linearmente indipendenti, λ_1 e \mathbf{x}_1 si possono determinare con il *metodo delle potenze*.

- Dato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$, poniamo $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} / \|\mathbf{x}^{(0)}\|$.
- Per $k=1,2,\dots$ calcolo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}, \quad \lambda^{(k)} = (\mathbf{y}^{(k)})^T A \mathbf{y}^{(k-1)}.$$

La procedure si arresta in corrispondenza al primo indice k tale che $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \epsilon |\lambda^{(k)}|$.

Come noto il predetto metodo costruisce due successioni convergenti, ovvero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^{(k)} = \alpha \mathbf{x}_1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1.$$

Perchè si chiama *metodo delle potenze*? Basta osservare che $\mathbf{y}^{(k)} = r^{(k)} A^k \mathbf{y}^{(0)}$, cioè appaiono le potenze della matrice A , con

$$r^{(k)} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\|\mathbf{x}^{(i)}\|}.$$

1. Si consideri, per $\alpha \in \mathbb{R}$, la famiglia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 10 \\ 5 & 12 & 10 & 7 \\ 9 & 7 & 6 & 13 \\ 4 & 16 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Provare che se $\alpha = 30$ il metodo converge all'autovalore di modulo massimo in 27 iterazioni, mentre se $\alpha = -30$ il metodo richiede ben 1304 iterazioni. Considerate $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{ones}(4,1)$ e $\epsilon = 1.e - 10$. Come mai questo fatto?

Per verificare l'esattezza dei calcoli, usare la funzione `eig` di Matlab. Determinare anche come ulteriore prova il residuo $A \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1$.

2. Sempre per la matrice dell'esempio precedente, con gli stessi valori del parametro α , determinare l'autovalore di modulo minimo λ_η mediante il *metodo delle potenze inverse* (ovvero il metodo delle potenze applicato ad A^{-1}).
3. Cercare l'/gli autovalore/i di A , con $\alpha = -30$, più vicino/i al numero $\eta = -15$. In pratica si tratta di applicare il metodo delle potenze inverse per il calcolo dell'autovalore minimo della matrice $A_\eta = A - \eta I$. Quindi l'autovalore cercato sarà $\lambda_\eta = \lambda_{\min}(A_\eta) + \eta$.

Come cambia il numero delle iterazioni se prendiamo $\eta = -17$?

Per $x^{(0)}$ ed ϵ usare gli stessi valori suggeriti al punto 1.

◇◇

Tempo massimo: 2 ore.