LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO: Gruppo A

Interpolazione di funzioni e fenomeno di Runge

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

Verona, 27 febbraio 2006

Si consideri la seguente *funzione di Runge*

$$g(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,1] \, . \tag{1}$$

Presi n punti equispaziati $x_i = -1 + (i-1)h, \;\; i = 1,...,n, \quad h = 2/(n-1)$ il polinomio d'interpolazione di grado $n-1$, $p_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1$, si può costruire risolvendo il sistema lineare per determinare i coefficienti a_i:

$$V\,\mathbf{a} \,=\, \mathbf{y} \,,$$

con $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)^T$, $y = (y_1,...,y_n)^T$ (qui $y_i = g(x_i)$) e V che è *matrice di Vandermonde* i cui elementi sono $v_{i,j} = x_i^{j-1}$.

Diversamente, si può esprimere il polinomio di interpolazione $p_{n-1}(x)$ in *forma di Newton*,

$$p_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x-x_1) + b_3(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + b_n(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \,,$$

dove b_i rappresenta la differenza divisa di ordine i della funzione $g(x)$.

1. Per determinare i coefficienti $b_i, \;\; i = 1,...,n$ possimo implementare l'*algoritmo delle differenze divise.*

```
%-----------------------------------------------------
% Algoritmo delle differenze divise
%
% Inputs
% x: vettore dei punti di interpolazione,
% y: vettore dei valori della funzione.
% Output
% b: vettore delle differenze divise b=[b_1,....b_n]
%-----------------------------------------------------
b=y;
 for i=1:n,
  if i~=1,
    for j=2:i,
       b(i)=(b(i)-b(j-1))/(x(i)-x(j-1));
    end;
  end;
 end;
```

2. Il valore del polinomio p_{n-1} nel punto x, si determina con lo *schema di Hörner*:

$$\begin{aligned} p &= b_n; \\ p &= (x - x_i)p + b_i, \quad i = n-1, ..., 1 \end{aligned} \tag{2}$$

3. L' errore di interpolazione si può esprimere mediante la formula

$$E_{n-1}(g) = g(x) - p_{n-1}g(x) = \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,.$$

   Se $f \in \mathcal{C}^n(I)$, si dimostra che

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_1, ..., x_n, x]\,. \tag{3}$$

   con x non necesssariamente scelto nell'intervallo $[x_1, x_n]$.

(i) Implementare come M-functions gli algoritmi 1. e 2. Fare quindi un programma Matlab che valuti e disegni la funzione $g(x)$ e il polinomio di interpolazione di gradi variabili da n=2 a n=15. Che fenomeno si osserva per $n > 11$? Calcolare anche l'errore d'interpolazione in un punto $x \neq x_i,\ x \in [-1, 1]$ mediante la formula (3).

(ii) Costruire il polinomio di interpolazione sui punti di *Chebyshev* in $[-1, 1]$

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, .., n$$

   e confrontare i risultati con il caso (i).

⋄♢⋄

Tempo massimo: 2 ore.