

# LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO - Gruppo A

Sistemi lineari: II  
Università di Verona

Prof. S. De Marchi

Verona, 30 novembre 2005

1. Si consideri la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & & c_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Se la fattorizzazione LU di A esiste, allora L e U sono due matrici bidiagonali (inferiore e superiore, rispettivamente) della forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

I coefficienti incogniti si determinano imponendo l'uguaglianza  $LU=A$ , mediante il seguente *Algoritmo di Thomas*

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Come esercizio si chiede di costruire una matrice tridiagonale T con i comandi Matlab

```
>> b=ones(10,1); a=2*b; c=3*b;  
>> T=spdiags([b a c],-1:1,10,10);
```

quindi di risolvere il sistema  $Tx=b$  con l'algoritmo di Thomas, con b scelto cosicché si abbia  $x=\text{ones}(10,1)$ .

Quante operazioni si risparmiano rispetto alla fattorizzazione classica LU fatta con Gauss?

2. Sia  $\hat{x}$  la soluzione del sistema  $Ax = b$  calcolata mediante l'algoritmo di Gauss. Implementiamo il cosiddetto **raffinamento iterativo** che consiste dei 3 seguenti passi

- (a) calcola  $r = b - A\hat{x}$ ;
- (b) risolvi il sistema  $Ad = r$  usando la stessa fattorizzazione LU di A usata per risolvere  $Ax = b$ ;

(c) sia  $y = \hat{x} + d$

ripeti finché

$$\frac{\|d\|}{\|y\|} > tol$$

dove  $tol$  è una prefissata tolleranza considerando  $y$  come soluzione.

Nota: di solito (cioè in assenza di errori di arrotondamento) bastano 1-2 iterazioni per convergere. Il metodo serve come stabilizzatore del metodo di eliminazione di Gauss.

Scrivere una funzione Matlab che implementa l'algoritmo del **raffinamento iterativo**.

◇◇

**Tempo massimo: 2 ore.**