Soluzioni Appello di Analisi Matematica II del 15/7/2004

1) Data $f(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ proviamo che è continua in $\mathbb{R}^2$

Infatti

$$0 \leq \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |y| \to 0 \quad \text{se } y \to 0$$

#

---

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)\,x}{(y-1)^2 + x^2} + 1 & (x,y) \neq (0,1) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) f è continua in $(0,1)$?

Ora, tendendo lungo rette del tipo $x = m(y-1)$

$$f(m(y-1), y) = \frac{m(y-1)^2}{(y-1)^2 + m^2(y-1)^2} + 1 = \frac{m}{1+m^2} + 1$$

che a seconda del valore di m dà limiti diversi

Es. $m = 0$ il limite è 1 $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,1)$

$m = 1$ " è $\frac{3}{2}$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h^2} = 1$$

Perciò la derivata parziale esiste.

c) f è differenziabile in $(0,1)$?

NO xché non è continua in $(0,1)$ (come provato in a))

3)

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3+y^3 - 8\,(x^2+y^2) \\ x^2+y^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$\to$ posso scrivere $f(x,y) = x^3+y^3 - 8c$

Considero $F(x,y,\lambda) = x^3+y^3-8c+\lambda\,(c-x^2-y^2)$

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2-2\lambda x = 0 \\ \partial F/\partial y = 3y^2-2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = c-x^2-y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,(3x-2\lambda) = 0 \\ y\,(3y-2\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = c \end{cases}$$

Sembrerebbe che $(0,0,0)$ sia una soluzione ma ciò implica che $c=0$ che non è detto.

- Invece se $x = \frac{2}{3}\lambda$ e $y = \frac{2}{3}\lambda$

  allora $\lambda_{1,2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}$

Si ottengono perciò
$A = \left(\sqrt{\frac{c}{2}}, \sqrt{\frac{c}{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$ $\qquad B = \left(-\sqrt{\frac{c}{2}}, -\sqrt{\frac{c}{2}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$

- Se $x=0 \qquad y=\pm\sqrt{c} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}\sqrt{c}$

  $x=\pm\sqrt{c} \qquad y=0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}\sqrt{c}$

otteniamo altri 4 punti

$\boxed{C_{1,2} = \left(0, \pm\sqrt{c}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{c}\right)}$ e $\boxed{\left(\pm\sqrt{c}, 0, \pm\frac{3}{2}\sqrt{c}\right) = D_{1,2}}$

$\Rightarrow$ In totale 6 punti (visto che il sistema $(*)$ è di 6 grado!)

Facilmente si verifica che

$f\left(\sqrt{\frac{c}{2}}, \sqrt{\frac{c}{2}}\right) = c\left(\sqrt{\frac{c}{2}}-8\right)$ max (poiché $c\left(\sqrt{\frac{c}{2}}-8\right) > -c\left(8+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$)

$f\left(-\sqrt{\frac{c}{2}}, -\sqrt{\frac{c}{2}}\right) = -c\left(8+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$ min

$f(0, \sqrt{c}) = c\left(\sqrt{\frac{c}{2}}-8\right)$ max

per simmetria si hanno tutti gli altri valori ovvero

A è di max, B di min

C_1, D_1 di max $\quad C_2, D_2$ di min.

4)

$$\begin{cases} x y y' = \log x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

risolvo per separazione di variabili

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{x} \qquad \left(\begin{matrix}\text{essendo} \\ x \neq 0\end{matrix}\right)$$

integro

$$\int y \, dy = \int \frac{\log x}{x} \, dx$$

$$y^2(x) = \log^2 x + c$$

oppure $\frac{y^2(x)}{2} = \frac{\log^2 x}{2} + c$

da cui $y^2(x) = \log^2 x + 2c$

$\Rightarrow \quad c = 2$.

impongo la condizione iniziale

$$4 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

da cui

$$y(x) = \pm \sqrt{\log^2 x + 4}$$

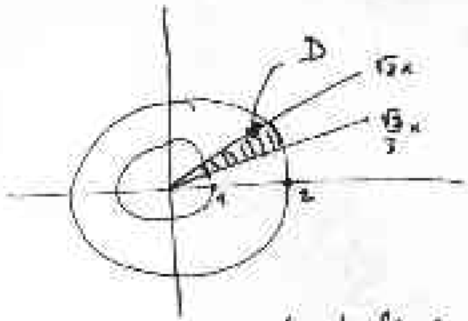
che è valida $\forall x \neq 0$ come assunto

$\left(\text{oppure} \quad y(x) = \pm \sqrt{\log^2 x + 2} \right)$

5)
$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{ (x,y) : \quad 1 \le x^2+y^2 \le 2, \quad \frac{\sqrt{3}x}{3} \le y \le \sqrt{3}\,x \right\}$$

che ha la forma



Risulta conveniente passare a coordinate polari

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

Data la forma di D avremo

$$1 \le \rho \le \sqrt{2} \qquad (\text{perché } 1 \le \rho^2 \le 2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \le \operatorname{tg}\theta \le \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \rho\sin\theta\,d\theta\,d\rho$$

$$= \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\theta\,d\theta\right) = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \#$$

6) Data la serie di potenze — Vale 8 pti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$$

a) determinare il raggio di convergenza

col criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\cos\left(\frac{5\pi}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\right|^n |x|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\cos\left(\frac{5}{3}\pi\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\right| |x|$$

$$= \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)|x| = \frac{1}{2}|x|$$

Perciò converge assolutamente se $\frac{1}{2}|x|<1 \Rightarrow |x|<2$

Il raggio di convergenza è perciò $r=2$. (3 pti)

b) Per $x=2$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)\right)^n 2^n$$

per verificare se converge o meno provino a calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)\right)^n 2^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(2\cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)\right)}$$

ma $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(2\cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \quad \left(\text{forma ind. } \frac{0}{0}\right)$$

(applico de l'Hospital)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\,\frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\,\frac{5}{3}\pi\right)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)} = \left(-\frac{5}{3}\pi\right)\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{5}{3}\pi\,\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{3}\pi\right)\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{3}\pi\right)}_{=-\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\pi\sqrt{3}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{5}{3}\pi\,\operatorname{tg}\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = e^{+\frac{5}{3}\pi\cdot\sqrt{3}}$$ che non è infinitesima

(5 pti)