Soluzioni Appello di Analisi Matematica II del 6/9/2004

COMPITO DEL 6/9/04

1) Determinare il differenziale della funzione

$$f(x,y,z,t) = xyzt + x + y + t$$

in $(1,1,1,1)$.

La funzione è $\mathscr{C}^1$ su $\mathbb{R}^4$?

Svolgimento $\nabla f = (yzt + 1,\ xzt+1,\ xyt+1,\ xyz+1)$

$\nabla f(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$

$df(\vec{h}) = 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4$

$f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^4)$ xché somma di polinomi, ∇f continuo e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^4$ #

2) La funzione $f(x,y) = y^2 + x^2 + y + x + \sin xy$ con $y(0)=0$ definisce una funzione implicita $\varphi(x)$ in $x=0$?

Svolgimento

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) + 1 + 2y$

$f(0,0) = 0 \quad$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$

Per il teorema delle funzioni implicite (di DINI), esiste U di 0 $\varphi(x)$ è implicitamente determinata e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

#

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2x + y\cos(xy)$$

3) Dire se esistono il max e min di

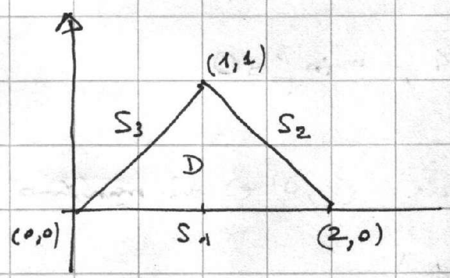
$$f(x,y) = x^2+xy$$

definita da D a $\mathbb{R}$ con D

$$D=\{(x,y): \ y\geq 0, \quad y-x\leq 0, \ x+y\leq 2\}$$

Svolgimento $\quad$ f è continua e definita su un compatto quindi ammette max e min

D è



Cerco il max e min o su $\mathring{D}$ dove $\nabla f=0$ o nei punti di frontiera

Ora

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Indico con S_1, S_2 e S_3 i 3 segmenti che compongono la frontiera di D (come da figura)

- Su S_1, $(x,y)=(x,0)$ $0\leq x\leq 2$ e $f(x,y)=x^2$. Sia $h_1:[0,2]\to\mathbb{R}$ $h_1(x)=x^2$. h_1 è strett. crescente ed ha minimo t.c. $\min h_1=0$ per $x=0$ e max assunto in $x=2$ che vale 4. Se un pto di max di f appartiene ad S_1 esso appartiene all'intervallo $[(0,0),(2,0)]$.
- Su S_2: $(x,y)=(x,2-x)$ $1\leq x\leq 2 \Rightarrow h_2(x)=2x$ (perché $x^2+x(2-$ ancora h_2 strett. crescente $\Rightarrow$ max di h_2 assunto in 2 e min di h_2 assunto in 1.

• Infine su S_3

$$(x,y) = (x,x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad h_3(x) = 2x^2$$

h_3 strett. crescente $\Rightarrow$ min di h_3 in $x=0$ e max di h_3 in $x=1$

Riassumendo il max e min di f sono raggiunti nei 3 punti di vertice del dominio D ovvero in

$$\{ (0,0), (2,0), (1,1) \}$$

Ora $f(0,0) = 0$, $f(2,0) = 4$, $f(1,1) = 2$

Conclusione:

$$\max f = 4, \quad \min f = 0$$

→ Si può anche controllare che $(0,0)$ è di sella perché in $(0$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$H(1,1) = 2 > 0$, $\det H(x,y) = -1$ e $\det H(0,0) = -1$

#

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2/x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento L'equazione è variabili separabili perciò posso riscriverla

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$$

integro $\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$ e ottengo

$$-\frac{1}{y} = -\log|x| + c$$

Impongo la condizione iniziale: otteniamo $c = -1$

Pertanto $-y(x) = \dfrac{1}{-\log|x| - 1} \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\log|x| + 1}$ //

5) Risolvere

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' + 6y = e^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

L'equazione diff. è a coeff. costanti di ordine 3. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$$

ovvero (dopo averla fattorizzata) $(\lambda^2 + 2)(\lambda + 3) = 0$

che ha radici: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}\,i$

La soluzione dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos\sqrt{2}\,x + c_3 \sin\sqrt{2}\,x$$

Cerchiamo la soluzione particolare

Sia

$$z(x) = A\,e^{x}$$

$$z'(x) = z''(x) = z'''(x) = A\,e^{x}$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale

$$A e^{x} + 3A e^{x} + 2A e^{x} + 6A e^{x} = e^{x}$$

$$\Downarrow$$

$$12A = 1 \implies A = \frac{1}{12}$$

$$z(x) = \frac{1}{12} e^{x}$$

Perciò $\quad y(x) = y_0(x) + z(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos\sqrt{2}x + c_3 \sin\sqrt{2}x +$

Per determinare c_1, c_2 e c_3 imponiamo le condizioni iniziali che portano al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{12} \\ -3c_1 + \sqrt{2}c_3 = -\frac{1}{12} \\ 9c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $\quad c_1 = -\frac{1}{44}, \quad c_2 = \frac{-5}{33\sqrt{2}}, \quad c_3 = -$

Infine, la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{e^{-3x}}{44} + \frac{2}{33}\cos\sqrt{2}x + \frac{5}{33\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + \frac{e^{x}}{12}, \quad x\in$$

#

6) Calcolare l'area della superficie di $\mathbb{R}^3$ definita dalle seguenti condizioni

$$x^2+y^2+z^2=2$$
$$x^2+y^2\le 1 \quad e \quad z\geq 0$$

<u>Svolgimento</u>

La parametrizzazione della sfera $x^2+y^2+z^2=2$ e'

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = \sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) = \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = \sqrt{2}\cos\varphi \end{cases} \quad \text{con} \quad (\varphi,\theta)\in \underbrace{\left[0,\tfrac{\pi}{4}\right]\times[0,2\pi]}_{(*)}$$

(*) questi intervalli si ottengono dal vincolo che $x^2+y^2\le 1$ e $z\geq 0$.

vedi testo pag. 292 formule per la sfera

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} = 2\sin^2\varphi\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin^2\varphi\sin^2\theta\,\vec{j} + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\vec{k}$$

$$|r_\varphi\times r_\theta| = 2\sin\varphi$$

sia $D=[0,\pi/4]\times[0,2\pi]$

$$\iint_D |r_\varphi\times r_\theta|\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} 2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = 2\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\right.$$

$$= 4\pi\,(-\cos\theta)_0^{\pi/4} = 4\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi\,(2-\sqrt{2})\ \#$$