Soluzioni Appello di Analisi Matematica II del 17/9/2004

1) a) Calcolare massimi e minimi relativi di (6 pti)

$$f(x,y) = y^5 + x^2 y - 4x^2 - 15y^3$$

b) Si trovi anche $\mathrm{Im}_f(\mathbb{R}^2)$ (l'immagine tramite f di $\mathbb{R}^2$) (4 pti)

<u>svolgimento</u>

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy - 8x \\ 5y^4 + x^2 - 45y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2xy - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(y-4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = 4 \\ 5y^4 + x^2 - 45y^2 = 0 \end{cases}$$

la 2ª eq. ponendo $x = 0 \Rightarrow 5y^2(y^2 - 9) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 3$

la 2ª eq. ponendo $y = 4 \Rightarrow 5 \cdot 256 + x^2 - 45 \cdot 16 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -5 \cdot 16 \cdot 7$

che non ha soluzioni

Pertanto i punti critici sono

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (0,3), \quad P_2 = (0,-3)$$

Hessiano della f è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y-8 & 2x \\ 2x & 20y^3 - 90y \end{vmatrix} = 4\left(10y^4 - 40y^3 - 45y^2 + 180y - x^2\right)$$

$H(0,0) = 0$

$H(0,3) = -540 < 0 \qquad H(0,-3) = 378020 > 0$

↳ P_1 né max né min

P_2 poiché $f''_{xx}(0,-3) = -14 < 0$ di <u>max relativo</u> e $f(0,-3) = 1$

P_0 : dall'Hessiano non concludiamo nulla. <u>Ma</u>

poiché $f(0,0) = 0$, $f(0,y) = y^5 - 15y^3 = y^3(y^2 - 15)$

ovvero in un intorno di $y = 0$ quello per cui

$y^2 - 15 < 0$ ovvero $-\sqrt{15} < y < \sqrt{15}$

la funzione cambia segno come $-y^3$ (che non ha segno costante)

perciò P_0 né di max né di min.

b) Restringendosi all'asse y, cioè $x=0$, si ottiene una funzione

$$g(y) = f(0,y) = y^5 - 15y^3$$

g è continua, definita su tutto $\mathbb{R}$ ovvero essa assume tutti i valori di $\mathbb{R}$. Detto in formule

$$\lim_{y \to -\infty} g(y) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \inf g = -\infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sup g = +\infty$$

↳ $g(y)$ e a maggior ragione $f(x,y)$ assume tutti i valori reali

↳ $\mathrm{Im}_f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. #

(Vale 5 punti)

2) In quali punti della sfera

$$x^2+y^2+z^2=1$$

è massimo il prodotto xyz?

<u>Svolgimento</u>

Usando i moltiplicatori di Lagrange, si deve massimizzare xyz sul vincolo dato dalla sfera. La funzione Lagrangiana è

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) = 0$$

$$F'_x = yz - 2\lambda x = 0$$
$$F'_y = xz - 2\lambda y = 0$$
$$F'_z = xy - 2\lambda z = 0$$
$$F'_\lambda = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

Si ottengono le relazioni $\left(2\lambda =\right) \dfrac{yz}{x} = \dfrac{xz}{y}$
(dalle prime due)

Da cui $y^2 = x^2$ ovvero $x = \pm y$

Se $x=y$, nella 3ª, $y^2 = 2\lambda z = \dfrac{xz^2}{y}$ ma $x=y \Rightarrow y$

Se $x=-y$, nella 3ª, $-y^2 = 2\lambda z = -z^2$ ancora $y^2=$

Sostituendo nella 4ª (abbiamo visto che $x^2=y^2=z^2$)

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt3}$$

Pertanto i punti richiesti sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt3}, +\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right) \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$$

#

(4 pti)

Calcolare la derivata di

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$$

in $A = (\sqrt{3}, -2)$ lungo la direzione $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Svolgimento

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y)=(\sqrt{3},-2)} \underset{\text{def}}{=} \nabla f(\sqrt{3},-2) \cdot (\sqrt{3}, -2)$$

Ora

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \; , \; \left(-\frac{x}{y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \right)$$

$$\nabla f(\sqrt{3}, -2) = \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Quindi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right|_{(\sqrt{3},-2)} = \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \#$$

4) Calcolare l'area della superficie

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \geq 0, \quad z = 1 - x^2 - y^2 \}$$

svolgimento

Sia $f(x,y) = -1 + x^2 + y^2$. Allora $\forall (x,y) \in A$ con

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \geq x^2 + y^2 \}$$

$$\partial f/\partial x = 2x \qquad \partial f/\partial y = 2y$$

$$A(S) = \iint_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$$

Per il calcolo conviene passare a coordinate polari, ovvero

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$$

$$A(S) = \iint_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho = 2\pi \, \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

#

(4 pti)

5) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Svolgimento</u>

È un'equazione a variabili separabili. Integrando

$$\int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx$$

$$-e^{-y} = -\cos x + c$$

$$e^{-y} = \cos x + c'$$

ovvero $-y = \log(\cos x + c')$

$$y = -\log(\cos x + c')$$

Impongo C.I. $\Longrightarrow$ $1 = -\log(1 + c')$ $\quad -1 = \log(1+c')$

$$\frac{1}{e} = 1 + c'$$

$$\boxed{\frac{1}{e} - 1 = c'}$$

Infine $y(x) = -\log\left(\cos x + \frac{1}{e} - 1\right)$

#

5) (8 punti)

Sviluppare in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$, la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$$

Dire anche in quale intervallo vale tale sviluppo.

Svolgimento

$$\frac{x-1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = 2 \\ A = -1 \end{matrix}$$

Quindi $\quad \dfrac{x-1}{x^2+x} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x}$

Ora $\quad \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{2+x-1} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\left(1+\frac{x-1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n$

da cui, tale uguaglianza vale per

$$\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \quad \text{s.s.s.} \quad -1 < x < 3$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-(x-1)\right)^n$$ che vale s.s.s. $|x-1| < 1$ ovvero $0 < x < 2$

Pertanto $\quad \dfrac{x-1}{x^2+x} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-(x-1)\right)^n$

che vale quando $0 < x < 2$

Possiamo riscrivere il tutto come

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-1)^n - \left(-(x-1)\right)^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-1)^n + (-1)^{n+1}(x-1)^n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^{n+1}\right\}(x-1)^n$$

→

In conclusione se $|x-1|<1$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n+(-1)^{n+1}\right](x-1)^n$$

#