

APPROSSIMAZIONE E INTERPOLAZIONE SU "SIMPLICES":
CARATTERIZZAZIONI, METODI ED ESTENSIONI

STEFANO DE MARCHI

TESI PER IL CONSEGUIMENTO DEL TITOLO DI DOTTORE DI RICERCA

VI CICLO

DOTTORATO DI RICERCA IN
MATEMATICA COMPUTAZIONALE E INFORMATICA MATEMATICA

CONSORZIO NAZIONALE NORD-ORIENTALE

SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**A Cristina
con infinito affetto**

Indice

1	Introduzione	1
2	Interpolazione su “simplices”: risultati preliminari	13
2.1	Coordinate baricentriche	13
2.2	Tecniche di suddivisione	17
2.2.1	Splitting regolare ed irregolare	17
2.3	Unisolvenza	20
2.4	Esistenza e unicità dell’interpolante su simplices	24
3	Interpolazione lagrangiana: applicazioni ed estensioni	29
3.1	Introduzione	29
3.2	Schema di Neville-Aitken	30
3.2.1	Schema di Neville-Aitken per funzioni di forma su triangoli	31
3.3	Schema di Neville-Aitken generalizzato	33
3.3.1	Applicazioni dello schema di N-A generalizzato	33
3.4	Sistemi di Tchebycheff e schema di N-A generalizzato	39
4	Polinomi di Bernstein e loro applicazioni	47
4.1	Generalità sui polinomi di Bernstein	47

4.1.1	Combinazioni lineari di polinomi di Bernstein univariati	50
4.1.2	Algoritmo di De Casteljaou	52
4.2	Polinomi di Bernstein multivariati	54
4.2.1	I polinomi $\mathcal{T}_{m,\mu}$	55
4.2.2	Combinazioni di polinomi di Bernstein multivariati	58
5	Funzionali di Riferimento e Spazi Caratteristici	63
5.1	Idee generali	63
5.2	Funzionale FR e Spazio SC per lo schema di Neville-Aitken	67
5.3	Funzionale FR e Spazio SC per lo schema di De Casteljaou	69
6	Risultati multidimensionali, $n > 2$	73
6.1	Schema di Neville-Aitken multivariato	73
6.1.1	Schema di N-A per sistemi di Tchebycheff	75
6.1.2	Funzionale di Riferimento e Spazio Caratteristico	77
6.2	Schema di De Casteljaou multivariato	78
6.2.1	Funzionale di Riferimento e Spazio caratteristico	80
6.3	Condizioni di regolarità tra simplices adiacenti	81
7	Interpolazione con curve e superfici frattali	87
7.1	Introduzione	87
7.2	Attrattori e i.f.s.	88
7.3	Interpolazione con curve frattali	89
7.4	Funzioni frattali interpolanti generalizzate	91
7.5	Superfici frattali su triangoli	95
7.6	Tecniche di calcolo di frattali interpolanti	98

7.6.1	Schemi di calcolo per curve frattali	98
7.6.2	Uno schema di calcolo per superfici frattali	99
7.7	Funzioni interpolanti su triangolazioni irregolari	101
7.7.1	Proprietà e costruzione di superfici irregolari	102
A	Calcolo di polinomi multivariati: algoritmi	107
A.1	Polinomi di Lagrange	107
A.2	Bézier patches	111
B	Algoritmi per interpolazione frattale	115
B.1	Algoritmo Deterministico e Random	115

Capitolo 1

Introduzione

Un problema di fondamentale importanza in molti settori dell'analisi numerica è la ricerca di funzioni interpolanti e approssimanti su un certo dominio nel quale si conoscono i valori di una funzione su determinati punti di esso. La possibilità di suddividere il dominio in *sottoregioni*, nelle quali la ricerca di funzioni approssimanti o interpolanti sia facilitata, ha sempre attratto l'attenzione degli studiosi permettendo di risolvere un "grosso" problema come somma di problemi più piccoli.

Tra le sottoregioni in cui un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è suddivisibile, le più semplici sono senza dubbio gli n -simplices. Un n -simplex è individuato da $n + 1$ punti $\lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}$ in \mathbb{R}^n e tali che

$$\text{vol}_n(\lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}) > 0.$$

Tale richiesta implica che la scelta dei punti deve essere tale che essi non devono appartenere ad uno stesso iperpiano. Inoltre ogni faccia dell' n -simplex è un $(n - 1)$ -simplex.

Vedremo al Capitolo 2 che ad ogni simplex non degenere si può associare un sistema di coordinate locali, dette *coordinate baricentriche*.

Se le funzioni interpolanti sono funzioni polinomiali, il problema di interpolazione su simplices ha soluzione purchè siano individuati su di esso un numero "sufficiente" di punti, detti *nodi*, per cui si possano individuare univocamente i coefficienti che le descrivono (vedi tra gli altri [43, 51, 62, 63, 65]).

Negli ultimi decenni grazie soprattutto all'uso di sempre più potenti calcolatori, si è affermata una metodologia computazionale per la descrizione e la rappresentazione di curve e superfici: il *CAGD* (Computer Aided Geometric Design). Esso si occupa prevalentemente dell' approssimazione di forme mediante curve a superfici parametriche ottenute con schemi interpolatori. Tra gli schemi più usati si ricordi ad esempio l' algoritmo di De Casteljau per la costruzione di curve e superfici di Bézier, di Shephard per interpolazione su "scattered data", di Chaikin per l'approssimazione di curve mediante schemi di suddivisione o per l'inserimento di nodi per curve B-spline ecc... Per una rassegna di tali metodi vedasi [7, 31]. In quest'ottica sono classificabili le curve di Bézier e i Bézier patches. In particolare nel

caso di 2-simplex parleremo di *patch triangolare di Bézier*.

Lo strumento che più di ogni altro ha esteso l'utilizzo di queste tecniche anche a settori tradizionali dell'approssimazione numerica è stato, a nostro avviso, l'algoritmo di De Casteljau [7, 30, 31]. I concetti matematici connessi con detto algoritmo sono basati essenzialmente sui polinomi di Bernstein. Si è dimostrato infatti, che *una curva o un patch di Bézier ottenuta/o con detto algoritmo, è esprimibile in termini di polinomi di Bernstein*. La conseguenza di questo risultato è quindi inequivocabile: le curve e le superfici di Bézier sono polinomi particolarmente regolari essendo i polinomi di Bernstein un utile strumento di approssimazione [17, 30]. In questa classe sarebbero da includersi le B-spline di cui le curve di Bézier sono un sottoinsieme [7, 55]. Una applicazione della capacità approssimanti delle spline si può trovare in [28], dove sono state usate spline multivariate, ottenute con la tecnica dei prodotti tensoriali, per approssimare la superficie di movimento di un robot.

Ci sono due categorie principali di problemi di approssimazione dove queste tecniche trovano applicazione. Problemi di *data fitting* per i quali è richiesto di costruire una approssimazione di una funzione incognita basata su qualche insieme di dati (spesso questi dati sono di natura sperimentale). Un esempio è ancora il problema della calibratura inversa di un robot descritta in [28].

Problemi *differenziali* la cui formulazione è data mediante una insieme di equazioni differenziali: ODE's, PDE's, BVP ecc.... Questi problemi sorgono nella modellizzazione matematica di processi fisici. In questi casi è di fondamentale importanza la ricerca di una soluzione approssimata avente certe caratteristiche di regolarità su un certo dominio. Tale soluzione è spesso determinata come proiezione su un sottospazio di dimensione finita dello spazio funzionale a cui appartiene la soluzione analitica. I metodi classici per far questo sono i metodi alle differenze finite e agli elementi finiti.

In particolare, nel metodo degli elementi finiti è di fondamentale importanza la scelta delle *funzioni di base* la cui combinazione determina l'approssimante della soluzione analitica del problema. La scelta di funzioni polinomiali e polinomiali a tratti sulle discretizzazioni del dominio, ha sempre svolto un ruolo determinante [43, 58, 67]. Per questo e altri motivi ancora, nella presente tesi si è cercato, quando si presenta l'occasione, di sottolineare come le tecniche di interpolazione trovano applicazione nella descrizione di *funzioni di base (o di forma)* per il metodo degli elementi finiti, vedi in particolare il Capitolo 3.

In entrambe le categorie su citate, si pone una questione fondamentale: *“È possibile determinare univocamente una funzione polinomiale interpolante i dati o i valori della soluzione su fissati punti del dominio e che presenti buone condizioni di regolarità?”*

La risposta è quasi sempre affermativa e una tecnica di ricerca di detta soluzione è passando attraverso una *triangolazione con simplices*. Questo è vero in particolare se lo spazio è topologico.

Ecco quindi la necessità di disporre di metodi per la costruzione di funzioni polinomiali interpolanti su simplices o su triangolazioni in genere.

Nel Capitolo 2 si presentano alcuni risultati preliminari relativi all'interpolazione su simplices. Si dimostra in particolare, l'utilità di descrivere queste funzioni in un sistema di coordinate locali dette *coordinate baricentriche*. La loro utilità sta principalmente nel rappresentare un sistema di coordinate simmetriche e invarianti per affinità. Inoltre esse sono positive all'interno del simplex. Di questo fatto si è fornita una diversa dimostrazione alla sezione 2.1.

Ad ogni n -simplex non degenere $\Sigma = \{\sigma^1, \dots, \sigma^{n+1}\}$, è associato un sistema di coordinate baricentriche nel quale ogni punto è individuato da $n + 1$ coordinate $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ tali che $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = 1$. Queste coordinate sono legate a quelle cartesiane da una trasformazione lineare $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\lambda(\sigma^i) = e_i$, ove e_i è l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^{n+1} .

Per ottenere schemi interpolanti o approssimanti aventi maggiore regolarità, di uso frequente sono le *tecniche di suddivisione*. Nel caso bidimensionale, si suddivide un dato triangolo in sottotriangoli al fine di individuare una distribuzione di nodi su cui costruire il polinomio interpolante. In generale per costruire un polinomio di grado p in \mathbb{R}^s , si necessita di $m = \binom{p+s}{s}$ punti distribuiti sul simplex, esattamente quanti i coefficienti del polinomio interpolante. Un tale triangolo sarà detto di *ordine* p .

Due sono le tecniche di suddivisione su triangoli che si considerano: lo *splitting regolare* e quello *irregolare*. In quello regolare di ordine p , ciascun lato viene suddiviso in p parti uguali, identificando così i nodi sui lati. Le linee parallele ai lati del triangolo uscenti da questi nodi, intersecandosi generano la suddivisione richiesta.

In quello irregolare, i nodi sono individuati mediante combinazioni baricentriche dei vertici del triangolo: questa suddivisione trova applicazione nella costruzione di superfici irregolari (o frattali). Di questo si discuterà al Capitolo 7.

Il principale problema connesso all'interpolazione è l'*unisolvenza* di esso su una data distribuzione di punti e per una certa scelta dello spazio polinomiale \mathcal{L} in cui si cerca la funzione interpolante. Si supponga che $\mathcal{L} = \text{span}\{l_1, \dots, l_k\}$, $l_i \in V^*$ con V^* il duale dello spazio lineare di dimensione finita V . Risolvere il problema

$$l_i(\mathbf{x}) = y_i \quad \mathbf{x} \in V, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.0.1)$$

significa richiedere che l'insieme \mathcal{L} sia V -unisolvante. Una condizione necessaria e sufficiente perchè questo avvenga è che la mappa $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{L}\mathbf{x}$ sia iniettiva [43].

Se $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_t\}$ è una base per V e quindi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^t c_i b_i$, allora (1.0.1) equivale a richiedere

$$\sum_{i=1}^t c_i l_j(b_i) = y_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.0.2)$$

Questo permette di scrivere la soluzione in forma determinantale [17, 9].

Alla sezione 2.3 si presentano condizioni di unisolvenza in \mathbb{R}^s , $s \geq 2$, sia nel caso di interpolazione di Hermite (o osculatoria) che di Lagrange.

Un teorema importante di esistenza e unicità dell'interpolante su elementi simpliciali, è dovuto a Nicolaides per *lattici principali di ordine* p in \mathbb{R}^n , $\mathcal{L}_{p,n}$ [51]: esso è presentato alla

sezione 2.4. Si consideri un n -simplex \mathcal{T}_n di vertici T_1, \dots, T_{n+1} . Allora il lattice principale di ordine p ad associato è

$$\mathcal{L}_{p,n}(\mathcal{T}_n) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i T_i, \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = 1, \xi_i \in A_p \right\} \quad (1.0.3)$$

dove $A_p = \left\{ 0, \frac{1}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, 1 \right\}$. È facile verificare che esso consta di $\frac{(p+n)!}{p!n!}$ elementi, cioè tali da permettere di determinare i coefficienti di un polinomio in $\mathbb{P}_p(\mathbb{R}^n)$. Di questo fatto si è data una nuova dimostrazione alla Proposizione 2.4.1.

Nel Capitolo 3 si prende in considerazione l'interpolazione lagrangiana. Viste le numerose applicazioni che essa trova nel metodo degli elementi finiti, si descrive una nuova tecnica di calcolo di funzioni di forma, basata su una estensione dell'algoritmo di Neville-Aitken (N-A), vedi sezione 3.2. Quindi si passeranno in rassegna alcune applicazioni dell'algoritmo di N-A a *distribuzioni generalizzate* di punti, descritte estesamente in [34, 35, 37, 59]. Questo è particolarmente conveniente nella soluzioni di problemi di data fitting.

La tecnica di calcolo di funzioni di forma descritta alla sezione 3.2, rappresenta un risultato originale in questa tesi. Ci si è ristretti al caso bidimensionale con triangoli di ordine p . Si consideri un triangolo τ di ordine p , i cui nodi sono individuati da terne (p_1^i, p_2^i, p_3^i) , per $i = 1, \dots, \frac{(p+1)(p+2)}{2}$, tali che $\sum_{j=1}^3 p_j^i = p$. Si sfrutta l'idea che la i -esima funzione di forma N_i^p , è un polinomio scrivibile nella seguente forma (vedi [67])

$$N_i^p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = l^{(p_1)}(\xi_1)l^{(p_2)}(\xi_2)l^{(p_3)}(\xi_3) \quad (1.0.4)$$

con (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le coordinate baricentriche e $l^{(p_i)}$ sono i polinomi elementari di Lagrange. Facendo uso dell'algoritmo di N-A unidimensionale, si determinano i polinomi $l^{(p_i)}(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$ per ogni nodo T_j sapendo che per definizione $N_i^p(T_j) = \delta_{ij}$.

Note le tre componenti lagrangiane si è in grado di descrivere la i -esima funzione di forma e quindi il polinomio interpolante su un triangolo di fissato ordine.

Nello sforzo di generalizzazione dello schema di N-A un posto meritano i *sistemi di Tchebycheff* (vedi [26, 55, 49]). Si tratta di insiemi di funzioni $\mathcal{F}_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ dove $f_j : G \rightarrow \mathbb{K}$, con \mathbb{K} corpo commutativo di caratteristica zero, $G = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geq n$ un insieme di punti per i quali il determinante

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.0.5)$$

Un tale determinante è noto anche come *determinante di Haar*.

Dato quindi un insieme di Tchebycheff è possibile generalizzare su un dato insieme di punti lo schema di N-A per calcolare il polinomio interpolante su un dato insieme di punti [49]. L'interesse di una tale generalizzazione sta in alcune relazioni per i coefficienti della combinazione che descrive il polinomio interpolante. Se si indica con $p_{n+m}f(x)$ il polinomio

interpolante di grado $n + m$ di una funzione f , esso è esprimibile come combinazione di polinomi di grado n , $p_n f(x)$, risultando

$$p_{n+m}f(x) = \sum_{j=0}^m \lambda_j(x) p_n f(x). \quad (1.0.6)$$

I coefficienti $\lambda_j(x)$ sono funzioni (polinomiali) indipendenti dalla funzione f e tali che

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1, \quad \forall x \in G.$$

Di questo risultato ci si è serviti per la ricerca di alcune caratterizzazioni e proprietà dell'interpolazione lagrangiana dimostrate al Capitolo 5. Si noti infine che nel caso in cui il sistema di Tchebycheff scelto sia la base canonica dei polinomi, l'espressione (1.0.6) permette di riottenere la relazione di ricorrenza di N-A generalizzato presentata alla sezione 3.2.

Algoritmi di calcolo di polinomi interpolanti su triangoli e in particolare su lattici principali di fissato ordine, sono presentati in Appendice A, sezione A.1.

Nel Capitolo 4 si presentano alcuni risultati relativi ai polinomi di Bernstein. Questi polinomi oltre alla ben nota proprietà di fornire una dimostrazione al teorema di approssimazione di Weierstrass di una funzione continua su un intervallo della retta reale, hanno trovato popolarità nella descrizione di curve e superfici di Bézier.

Nonostante le potenti capacità di approssimazione, i polinomi di Bernstein convergono alla funzione solo linearmente [17, 52]. Nel corso degli ultimi decenni si sono introdotte delle *combinazioni di polinomi di Bernstein* allo scopo di accelerare la convergenza di detti polinomi alla funzione approssimanda (vedi [11] nel caso unidimensionale e [66] per quello multidimensionale). Si indichi con $B_m f$ l'approssimante di Bernstein di una data funzione f esprimibile come

$$B_m f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=m} c_{\mathbf{k}} B_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (1.0.7)$$

ove, in notazione multiindice, $B_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \binom{m}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ è un polinomio di Bernstein multivariato di grado m .

Tali combinazioni sono definite ricorsivamente come segue

$$L_m^{[0]} = B_m f \quad (1.0.8)$$

$$L_m^{[k]} = (2^k - 1)^{-1} \left(2^k L_{2m}^{[k-1]} - L_m^{[k-1]} \right) \quad k = 1, 2, \dots$$

Si verifica immediatamente che $L_m^{[k]} f$ è effettivamente una combinazione di operatori di Bernstein $B_t f$, con $t = t(k)$ una qualunque funzione di k . Ciò che è interessante è che

$L_m^{[k+1]}f - f = o\left(\frac{1}{m^{k+1}}\right)$ per ogni $f \in \mathcal{C}^{2(k+1)}(\mathcal{L}_{m,n})$, vedi sezione 4.2.

Un breve accenno ai polinomi $T_{m,\mu}$ introdotti in sezione 4.2 per costruire queste combinazioni nel caso multidimensionale. Partiamo dalla loro definizione.

$$\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = \sum_{|\alpha|=m} (x_\alpha - x)^\mu B_\alpha^m(x) = m^{-|\mu|} \sum_{|\omega|=|\mu|} \beta_{\mu,\omega} \mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) \quad (1.0.9)$$

ove $\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) = \sum_{|\alpha|=m} (\alpha - m\xi)^\omega B_\alpha^m(x)$ dove $\alpha, \omega \in \mathbb{N}^{n+1}$, e $x = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \lambda^i$ è un punto su un lattice principale di ordine m . In (1.0.9) abbiamo introdotto dei coefficienti $\beta_{\mu,\omega}$ dei quali si sono date esplicite espressioni in funzione dei vertici del lattice, vedasi espressioni (4.2.7), (4.2.8) e (4.2.9). Questo risultato, originale in questa tesi, conferma che notazione usata per detti coefficienti è consistente: essi sono numeri dipendenti solo dai multiindici ω e da μ .

Dal punto di vista computazionale esiste un potente strumento per costruire funzioni di Bézier: l'algoritmo di De Casteljau. Come per l'algoritmo di Neville-Aitken esso consente di costruire la funzione di Bézier con successive combinazioni convesse, partendo da un insieme di punti del piano o più in generale di \mathbb{R}^n . Esso è facilmente adattabile a un sistema locale di coordinate baricentriche [7, 30]. Di esso si sono descritte sia la versione unidimensionale che quella multivariata dimostrando che un *punto appartenente alla funzione di Bézier è esprimibile in termini di polinomi di Bernstein*. Una versione migliorata dal punto di vista dell'efficienza computazionale, basata su una riscrittura dei coefficienti in una forma modificata ereditata dallo schema di Hörner, si presenta in Appendice A, sezione A.2.

Nel Capitolo 5 si descrivono gli schemi di Neville-Aitken e di De Casteljau nell'ottica della teoria dell'extrapolazione. Detti schemi possono essere visti come trasformazioni del tipo

$$F_j^p(x) = \sum_{j=i}^{i+p} c_{i,j}^p(x) F_i \quad (1.0.10)$$

dove i numeri F_i sono valori fissati (nei casi suddetti al passo iniziale essi rappresentano i valori del polinomio nei nodi) e $c_{i,j}^p$ sono funzioni (polinomi di grado p per N-A e De Casteljau).

Trasformazioni del tipo (1.0.10) sono completamente caratterizzate da un funzionale lineare, detto *Funzionale di Riferimento*, a cui è associato uno spazio vettoriale detto *Spazio Caratteristico*.

Lo spazio caratteristico non sempre esiste. Se esiste esso è generato da $p + 1$ funzioni linearmente indipendenti $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ soddisfacenti a delle proprietà descritte in sezione 5.1.

Il funzionale di riferimento associato allo schema (1.0.10) si indica con

$$\mathcal{F}_j^p(\gamma) = \sum_{i=j}^{j+p} c_{i,j}^p \gamma(z_i) \quad (1.0.11)$$

ove z_i sono punti di un insieme $Z \subset \mathbb{R}^n$. Se in particolare $\gamma(z_i) = F_i$, allora $\mathcal{F}_j^p(\gamma) = F_j^p(x)$. Quindi la conoscenza delle funzioni $\gamma_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ consente di calcolare il polinomio interpolante. Ma non solo, il calcolo di esso si può ottenere come rapporto di determinanti [10], come per il problema generale di interpolazione, a cui possono applicarsi tecniche di accelerazione della convergenza. Infatti il funzionale di riferimento soddisfa ad una ricorrenza la cui espressione rientra nello schema dell'*E-algoritmo* [10].

Si è dimostrato che nel caso dello schema di N-A esiste lo spazio caratteristico sia nel caso unidimensionale [20] che in quello mutidimensionale [22], la cui dimostrazione è differita al Capitolo 6. In entrambe le dimostrazioni si è fatto uso delle proprietà dello schema di N-A per sistemi di Tchebycheff. Questo è uno dei risultati originali contenuti in questa tesi.

Nel caso dell'approssimazione di Bernstein-Bézier si è provato che lo spazio caratteristico *non esiste* nel caso unidimensionale. Già in [10] si era provato che usando la relazione di ricorrenza classica per i polinomi di Bernstein non è possibile determinare uno spazio caratteristico associato allo schema di De Casteljaou. Si è cercato di usare un'altra relazione di ricorrenza per detti polinomi ricavabile dalla relazione a cui soddisfano i *polinomi generalizzati di Bernstein*, ovvero quelli aventi esponenti non interi (vedi [45] pagg. 44-46). Ma anche in questo caso lo sforzo è stato vano deducendo, come risultato originale, che in effetti non esiste lo spazio caratteristico. Inoltre è stata dedotta una nuova espressione per i coefficienti dell'approssimante di Bernstein basata sui polinomi generalizzati (vedasi tabella 5.1 e relazione 5.3.2).

Nel Capitolo 6 si sono raccolti i risultati raggiunti nel caso multidimensionale, nella descrizione di polinomi interpolanti e approssimanti.

In sezione 6.1 si ricavano alcune utili espressioni connesse allo schema di N-A associato a sistemi di Tchebycheff. Per un sistema di Tchebycheff, è possibile esprimere il polinomio interpolante mediante una relazione di ricorrenza, provata in [49], ovvero la relazione (3.4.9). I coefficienti $(\lambda_j(x))_{j=0,\dots,m}$ in questa relazione, si possono esprimere come rapporto di determinanti di matrici i cui elementi, che indicheremo con

$$(\gamma_{k,l}(x))_{k=1,\dots,m; l=0,\dots,j-1,j+1,\dots,m}$$

con $j = 0, \dots, m$, sono gli *errori di interpolazione* ottenuti sostituendo la funzione da interpolare, f , con una delle funzioni della famiglia (si veda il teorema 3.4.2). Inoltre questi errori possono essere calcolati come rapporto di determinanti di Vandermonde generalizzati.

Due interessanti relazioni si possono dedurre:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1 \\ \sum_{j=0}^m \gamma_{k,l}(x) \lambda_j(x) = 0 \quad k=1,\dots,m \end{cases} \quad (1.0.12)$$

Queste ultime relazioni sono quelle di cui si è fatto uso per la determinazione dello spazio caratteristico. Infatti, dalla (1.0.12) le funzioni $\gamma_{k,l}(x)$ sono proprio le funzioni γ_i richieste

nella definizione di spazio caratteristico. I dettagli sono descritti alla sezione 6.1.2.

Nel caso multidimensionale dello schema di De Castel'jau, si veda la sezione 6.2, per dimostrare l'esistenza dello spazio caratteristico si è fatto uso delle proprietà a cui soddisfano i polinomi $T_{m,\mu}$ introdotti al Capitolo 4. Esplicitamente essi sono scrivibili come una combinazione di polinomi di Bernstein

$$T_{m,\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x})^\mu B_\alpha^m(\mathbf{x}) \quad (1.0.13)$$

Al solito, con $B_\alpha^m(\mathbf{x})$ si è indicato il polinomio di Bernstein multivariato di grado m e $\alpha \in \mathbb{N}^s$. Si dimostra facilmente che i polinomi $T_{m,\mu}(\mathbf{x})$ soddisfano alle relazioni

$$\begin{aligned} T_{m,\mu}(\mathbf{x}) &= 1 & |\mu| &= 0 \\ T_{m,\mu}(\mathbf{x}) &= 0 & |\mu| &= 1 \end{aligned}$$

Sono queste relazioni che hanno consentito di dimostrare l'esistenza dello spazio caratteristico. Anche questo è un risultato originale contenuto in questa tesi.

Un altro aspetto importante nella costruzione di funzioni interpolanti è lo studio delle *condizioni di adiacenza*, ovvero quelle a cui devono soddisfare i polinomi su simplices confinanti. Una approccio si presenta in sezione 6.3 per polinomi in forma di Bernstein-Bézier. Queste condizioni, come provato al teorema 6.3.1, riguardano essenzialmente i coefficienti dei patches polinomiali definiti su simplices adiacenti.

Nel Capitolo 7 si presenta l'interpolazione su simplices basata su funzioni frattali. In particolare si descrivono curve e superfici frattali ottenute come attrattori di i.f.s. (iterated function system) [3, 4] e superfici frattali ottenute con lo schema di suddivisione irregolare descritto al Capitolo 2. Di entrambe le tecniche si descrivono sia i fondamenti teorici che computazionali. In particolare gli algoritmi per determinare curve e superfici interpolanti frattali sono presentati in Appendice B.

L'interesse dell'interpolazione frattale sta principalmente nel disporre di metodi di calcolo veloci e efficienti nell'utilizzo della memoria di massa. Per descrivere completamente un i.f.s., basta allocare una matrice contenente i coefficienti delle mappe lineari che lo definiscono. Infatti un i.f.s., su un insieme di punti $\Xi = \{\mathbf{x}_l : l = 0, 1, \dots, m\}$ con $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^s$, è esprimibile come un insieme di mappe

$$w_i(\mathbf{x}) = A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s \quad (1.0.14)$$

Ad esempio, per $s = 2$, la forma della matrice A è

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \quad (1.0.15)$$

e $\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ g_i \end{pmatrix}$. I coefficienti a_i, c_i, d_i, e_i e g_i si determinano con le condizioni $w_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{i-1}$ e $w_i(\mathbf{x}_m) = \mathbf{x}_i$.

Per alcuni dei parametri che definiscono le mappe w_i c'è libertà di scelta. I parametri liberi, detti *parametri di scalatura verticale*, per ragioni che sono spiegate alla sezione 7.3, permettono di determinare la forma della curva o superficie generata. Infatti, se sono nulli la curva o la superficie altro non è che l'interpolante lineare. Di questo fatto si dà una dimostrazione nella Proposizione 7.3.1.

Dal punto di vista analitico, l'attrattore di un i.f.s. interpolante altro non è che il limite a cui convergono dette trasformazioni. L'esistenza di tale limite richiede che queste mappe siano *contrattive*, ovvero che l'i.f.s. sia *iperbolico*. La topologia dello spazio e la metrica su di esso indotta, consentono di dedurre tutte le condizioni per dimostrare che tale attrattore effettivamente esiste dandone una esplicita espressione (vedi Teorema 7.2.1 e Teorema 7.4.1).

L'approccio che in prima istanza sembra attraente, si rivela piuttosto limitato. Le curve e le superfici che sono generate possono essere continue, uniformemente continue e più in generale molto irregolari o frattali. Questo suggerisce due considerazioni.

- (i) La descrizione di funzioni interpolanti mediante la tecnica i.f.s. può essere usata come una prima approssimazione per il metodo degli elementi finiti o per la generazione di curve e superfici che approssimano dei dati distribuiti a caso, detti usualmente "scattered data".
- (ii) La costruzione di superfici (irregolari) mediante schemi di suddivisione irregolare consente di disporre di un metodo di interpolazione multidimensionale continua, come descritto in [24].

Dopo questa breve introduzione è doveroso indicare alcune conclusioni e prospettive per futuri approfondimenti. Anzitutto l'utilità della conoscenza di uno spazio caratteristico per gli schemi di N-A e De Casteljaeu sta nella possibilità di conoscere una nuova base polinomiale per l'operatore interpolante o approssimante. Infatti, le funzioni che generano detto spazio, permettendo di calcolare l'interpolante come rapporto di determinanti, costituiscono una base per risolvere il problema di interpolazione (generalizzata). La rappresentazione determinantale ha un vantaggio: la possibilità di applicare delle tecniche di accelerazione della convergenza per il calcolo dei determinanti. Come futuro obiettivo per questi risultati, si cercherà di usare dette tecniche per la determinazione del polinomio interpolante a partire dalle funzioni che generano lo spazio caratteristico.

Per quanto concerne il Capitolo 7 relativo all'interpolazione frattale, come già detto essa permette di costruire in generale curve e superfici irregolari, ma con una opportuna scelta dei parametri consentono di generare curve o superfici \mathcal{C}^0 . Un desiderio futuro è di poter estendere detti risultati alla approssimazione di soluzioni di problemi differenziali magari modificando la struttura di degli i.f.s. per ottenere soluzioni più regolari.

Ringraziamenti

Il primo grazie va ai miei genitori, *Elena e Bruno*, per il continuo incoraggiamento e per avermi dato la possibilità di studiare questa affascinante materia qual è la Matematica.

Ma soprattutto grazie a mia moglie *Cristina*, la persona più dolce e carina che si possa incontrare. Lei non solo mi ha costantemente aiutato ma pazientemente ha atteso che concludessi questo periodo di studio in “attesa di tempi migliori”.

Grazie ai miei amici di dottorato. Con loro ho passato dei momenti indimenticabili sia di studio che di *svago*. Spesso ci siamo aiutati a risolvere problemi matematici e veri problemi di vita. Grazie *Anna, Carla, Laura, Luca, Sabina e Valeria*.

Il mio sentito ringraziamento va alla *Prof. Maria Morandi Cecchi*, dell' Università degli Studi di Padova, che ha accettato di farmi da tutore in questi anni di dottorato. Grazie perchè mi ha dato la possibilità di fare queste ricerche indicandomi le “orme” da seguire.

Elenco delle Figure

2.1	<i>Coordinate baricentriche (o di area) in un triangolo di ordine 2</i>	14
2.2	<i>Coordinate di area: valore e segno.</i>	16
2.3	<i>Splitting regolare su triangoli di vari ordini: a) triangolo di ordine 1; b) triangolo di ordine 2; c) triangolo di ordine 3</i>	18
2.4	<i>Splitting irregolare e regolare di ordine 2 di un triangolo</i>	19
2.5	<i>Esempio di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^2)$ intercambiabilità: a) insiemi intercambiabili in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$ b) insiemi non intercambiabili in $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$</i>	24
3.1	<i>Distribuzione di tipo simpliciale con $q = \frac{1}{2}$ ed $m = 3$.</i>	37
3.2	<i>Insieme unisolvente sullo spazio dei polinomi $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.</i>	38
4.1	<i>Costruzione di una curva di Bézier con l'algoritmo di De Casteljau.</i>	53
5.1	<i>Tabella di generazione dei polinomi di Bernstein mediante la ricorrenza basata sulle differenze divise della funzione x^ν.</i>	70
6.1	<i>Condizioni di regolarità per triangoli di ordine 2</i>	84
6.2	<i>Due casi particolari di adiacenza tra triangoli.</i>	85
7.1	<i>Proiezioni sui piani</i>	94
7.2	<i>Il simplex canonico suddiviso in due sottotriangoli</i>	97
7.3	<i>Un triangolo irregolarmente suddiviso di ordine 2</i>	102

A.1	<i>Un triangolo con distribuzione “sequenziale” dei punti di interpolazione . . .</i>	109
A.2	<i>Un triangolo di ordine 3 con nodi etichettati in ordine sequenziale. È evidenziato il “cono” su cui scegliere il terzo nodo</i>	110
A.3	<i>Un 2-simplex con la suddivisione in 3 regioni</i>	112
B.1	<i>Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l’algoritmo deterministico B.1</i>	117
B.2	<i>Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l’algoritmo random B.2</i>	119
B.3	<i>Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l’algoritmo random B.2</i>	120

Capitolo 2

Interpolazione su “simplices”: risultati preliminari

In questo capitolo preliminare ci occuperemo di presentare le notazioni e alcuni risultati fondamentali relativi alla interpolazione polinomiale su simplices, di cui faremo uso nei capitoli seguenti. Come detto nell’Introduzione, ci interessano i simplices perchè molte applicazioni agli elementi finiti nonché la descrizione di superfici nel CAGD fanno uso prevalente di elementi simpliciali. Per questo motivo abbiamo scelto di presentare i risultati più noti e maggiormente usati per dimostrare l’esistenza e l’unicità del polinomio interpolante nonché le tecniche di splitting che consentono di costruire un tale polinomio. La descrizione delle funzioni interpolanti in coordinate baricentriche si è rilevata particolarmente facilitata. Dedicheremo la prima sezione alla presentazione delle caratteristiche principali delle coordinate baricentriche.

2.1 Coordinate baricentriche

Ogni punto A del piano può essere espresso in termini di coordinate baricentriche rispetto a un qualsiasi triangolo \mathcal{T} non degenere del piano di vertici T_1, T_2, T_3 . Risulta

$$A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i T_i \tag{2.1.1}$$

I coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono le *coordinate baricentriche* di A rispetto a \mathcal{T} . Segue da (2.1.1) che A è una combinazione baricentrica dei vertici del triangolo \mathcal{T} , infatti tali coordinate soddisfano alla relazione di “normalizzazione”

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \tag{2.1.2}$$

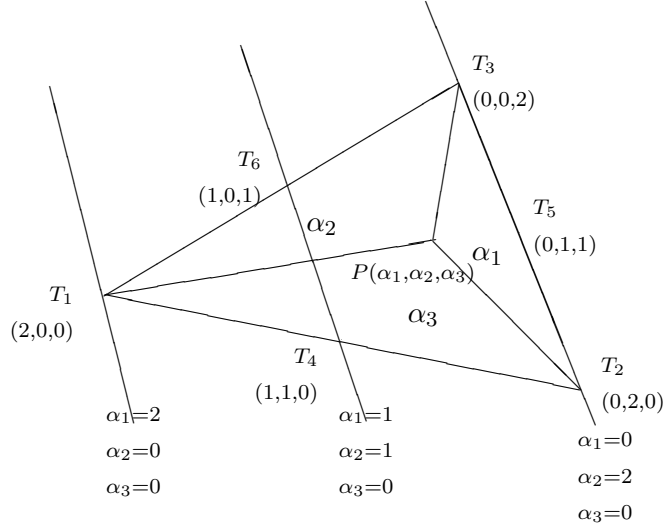


Fig. 2.1: Coordinate baricentriche (o di area) in un triangolo di ordine 2

Dette (x_i, y_i) le coordinate cartesiane di T_i e (x_A, y_A) quelle di A, da (2.1.1) e (2.1.2) ricaviamo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x_A = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ y_A = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Esplicitando in (2.1.3) rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ otteniamo

$$\alpha_i = \frac{a_i^0 + a_i^1 x_A + a_i^2 y_A}{2\Delta} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.4)$$

ove $\Delta = \text{area}\mathcal{T}$ e i coefficienti a_j^i sono

$$\begin{cases} a_i^0 = x_j y_k - x_k y_j \\ a_i^1 = y_j - y_k \\ a_i^2 = x_k - x_j \end{cases} \quad (2.1.5)$$

ove $(i, j, k) \in S_3^{(p)}$ con $S_3^{(p)}$ il gruppo delle permutazioni pari di tre oggetti.

Da (2.1.4) possiamo dedurre che le coordinate baricentriche sono rappresentate da linee parallele ai lati del triangolo. Ad esempio $\alpha_1 = 0$ sul lato congiungente i vertici T_2, T_3 ecc... Una definizione alternativa è la seguente:

$$\alpha_i = \frac{\text{area}AT_j T_k}{\Delta} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.6)$$

con i, j, k permutati come sopra. Si deduce immediatamente che questa è una buona definizione se $\Delta = \text{area}\mathcal{T} \neq 0$, cioè solo quando T_1, T_2 e T_3 non sono collineari definendo un

triangolo non degenere. Inoltre, (2.1.6) giustifica la definizione di uso corrente che le “ α_i sono le coordinate di area di A ”.

Le coordinate baricentriche soddisfano le seguenti due proprietà.

PROPOSIZIONE 2.1.1 *Sia A un generico punto del piano. Dette α_i le sue coordinate baricentriche, si ha*

- (i) se A è all'interno e sui lati del triangolo allora $0 \leq \alpha_i \leq 1$;
- (ii) altrimenti esse sono qualsiasi.

In ogni caso $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$.

DIM.: Distinguiamo 3 casi

1. A appartiene ad uno dei lati del triangolo.

Da (2.1.6) una coordinata baricentrica è nulla. Supponiamo α_3 . La relazione (2.1.2) implica che $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$. Se per assurdo $\alpha_2 < 0$ allora $\alpha_1 > 1$ che contraddirebbe (2.1.2).

2. A è interno al triangolo.

Facendo uso di (2.1.6) si conclude poiché il numeratore è sempre > 0 .

3. A è esterno al triangolo.

Supponiamo che A sta nel cono di vertice T_1 (vedi Fig. 2.2) avente per lati i prolungamenti delle rette T_1T_2 e T_1T_3 . Si verifica subito che

$$\alpha_2 = \frac{\text{area}AT_3T_1}{\Delta} = -\frac{\text{area}A'T_3T_1}{\Delta} < 0$$

$$\alpha_3 = \frac{\text{area}AT_1T_2}{\Delta} = -\frac{\text{area}A'T_1T_2}{\Delta} < 0$$

ove A' è il punto interno al triangolo corrispondente ad A .

Calcoli analoghi per le altre regioni ρ_2, \dots, ρ_6 . ■

Osservazione

Questi calcoli sono facilitati se si fa riferimento al 2-simplex standard, \mathcal{T}_S , avente lati paralleli agli assi coordinati e vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Questo richiede di usare dapprima una trasformazione $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_S$ che mappa i vertici di \mathcal{T} in quelli di \mathcal{T}_S .

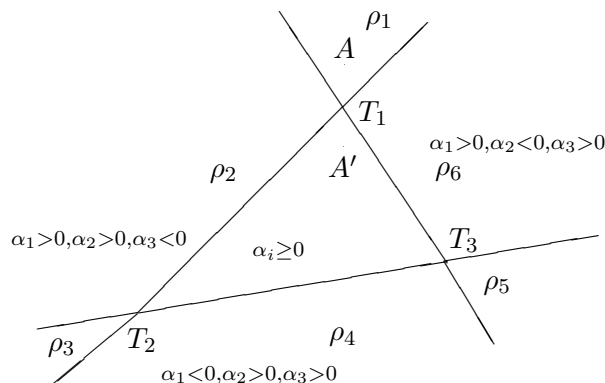


Fig. 2.2: Coordinate di area: valore e segno.

PROPOSIZIONE 2.1.2 *Le coordinate baricentriche sono invarianti per affinità.*

DIM.: Sia ϕ una affinità del piano in sé. Siano A un punto del piano e \mathcal{T} un triangolo non degenere rispetto al quale $A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i T_i$. È noto che una affinità si può scrivere come $\phi(x) = Bx + q$, ove $x, q \in \mathbb{R}^3$ e $B \in \mathbb{M}_{3 \times 3}$ è non singolare. Segue quindi

$$\phi(A) = BA + q = B \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i T_i \right) + q \stackrel{(2.1.2)}{=} \sum_{i=1}^3 \alpha_i (BT_i + q) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \phi(T_i). \blacksquare$$

Ne consegue che le coordinate baricentriche sono *simmetriche* nel senso che ciascun lato del triangolo è trattato allo stesso modo degli altri due quindi non è necessario l'utilizzo di un triangolo standard di riferimento (nel qual caso bisogna distinguere su quale lato ci si trova), rendendo la descrizione di funzioni polinomiali su simplices più semplice ed elegante.

Osservazione

Questi brevi richiami, d'altra parte indispensabili per capire le notazioni che verranno introdotte, possono facilmente estendersi al caso n dimensionale. Generalizzando quanto sinora detto, diremo che ad ogni n -simplex Σ non degenere è associato un sistema di coordinate baricentriche, ovvero una mappa biettiva

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che sui vertici di Σ vale $\lambda(T_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n+1$ (e_i è l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^{n+1}). Le proposizioni 2.1.1 e 2.1.2 rimangono ancora valide apportando le ovvie modifiche.

2.2 Tecniche di suddivisione

Consideriamo ancora un triangolo \mathcal{T} di vertici $\{T_1, T_2, T_3\}$ che chiameremo *triangolo originale*. In letteratura esistono molti modi di suddividere un triangolo in sottotriangoli che indicheremo come *triangoli derivati*. Lo scopo di tali suddivisioni è, tra l'altro, di ottenere schemi interpolanti o approssimanti aventi maggiore regolarità. Di uso frequente, soprattutto nelle tecniche di disegno geometrico e di approssimazione agli elementi finiti, sono gli schemi di suddivisione di Clough-Tocher [1, 2, 30], Powell-Sabin [12, 30], Morgan-Scott [62] e molti altri ancora (vedasi ad esempio le suddivisioni **type-1** e **type-2** in [15] per la costruzione di Spline multivariate, ecc...). Tutti questi schemi sono basati fondamentalmente nella suddivisione di ciascun angolo interno del triangolo in un numero finito di parti, allo scopo di individuare una distribuzione di nodi che permetta di costruire un polinomio (continuo a tratti) soddisfacente a certe condizioni di regolarità [1, 2, 12, 30, 62].

2.2.1 Splitting regolare ed irregolare

Poiché queste tecniche trovano applicazione nel metodo degli elementi finiti [51, 62, 65] nonché nella costruzione di superfici [1, 2, 15, 30], vogliamo ora analizzare queste due tecniche di splitting nel caso di elementi triangolari. La scelta restrittiva di elementi triangolari è suggerita dal fatto che ogni poligono è riconducibile ad un triangolo oppure è triangolarizzabile.

DEFINIZIONE 2.2.1 *Dato un triangolo \mathcal{T} , l'ordine di \mathcal{T} è un intero $p > 0$.*

L'ordine di un triangolo è legato al grado delle funzioni di forma di tipo polinomiale che si possono costruire su \mathcal{T} . È noto che un polinomio di grado p in \mathbb{R}^2 ha

$$m := m(p) = \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \binom{p+2}{2} \quad (2.2.1)$$

coefficienti¹. Quindi, per descrivere (univocamente) un polinomio di grado p su \mathcal{T} abbiamo bisogno di m punti. Una tecnica per individuare questi punti è il cosiddetto “*splitting regolare di ordine p* ” ottenuto suddividendo ciascun lato del triangolo equamente in p parti (vedi fig.2.3). Uno “*schema di suddivisione irregolare*” può essere ottenuto suddividendo ciascun lato in più parti non necessariamente uguali e iterando il procedimento. Precisamente, siano Q_1, Q_2 e Q_3 i tre punti, originati al primo passo di uno *splitting irregolare di ordine 2*, ottenuti come combinazione baricentrica dei vertici del triangolo originale. Avremo

$$Q_1 = (1 - \alpha_{11})T_2 + \alpha_{11}T_3$$

¹La formula (2.2.1) si estende facilmente a \mathbb{R}^s mediante $\binom{p+s}{s}$

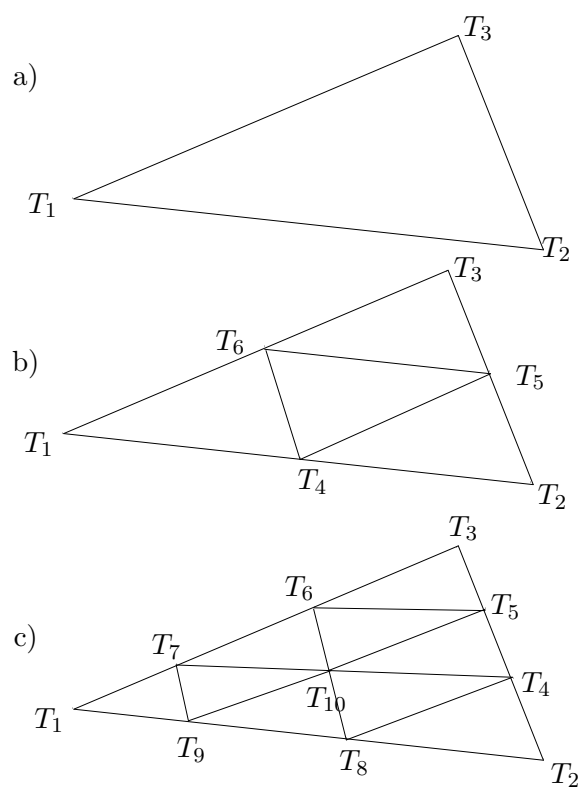


Fig. 2.3: *Splitting regolare su triangoli di vari ordini: a) triangolo di ordine 1; b) triangolo di ordine 2; c) triangolo di ordine 3*

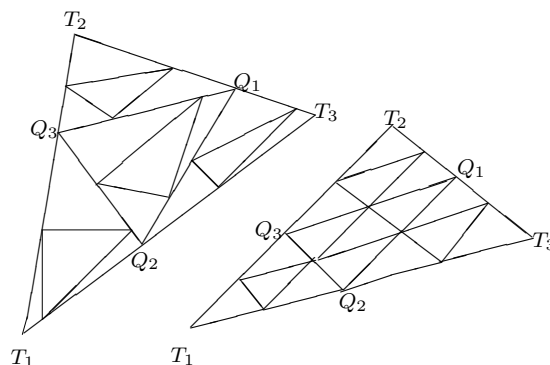


Fig. 2.4: *Splitting irregolare e regolare di ordine 2 di un triangolo*

$$\begin{aligned} Q_2 &= (1 - \alpha_{12})T_3 + \alpha_{12}T_1 \\ Q_3 &= (1 - \alpha_{13})T_1 + \alpha_{13}T_3 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ove $0 \leq \alpha_{1j} \leq 1$. Se $\alpha_{1j} = \frac{1}{2}$ avremo lo splitting regolare di ordine 2. Su ciascuno dei 4 triangoli ottenuti congiungendo questi punti ripetiamo la suddivisione originando 16 triangoli e così via. Indichiamo con α_{ij} $j = 1, 2, 3$ i coefficienti al passo i -esimo (vedi fig. 2.4). Presenteremo una tecnica di costruzione di una funzione interpolante su un triangolo suddiviso irregolarmente al Capitolo 7. Ora desideriamo evidenziare alcune differenze tra i due schemi ora presentati.

La prima osservazione riguarda il numero di nodi ottenuti con i due schemi. Il numero di nodi individuati nello splitting irregolare aumenta secondo la seguente legge. Supponiamo di essere all' n -esimo passo e siano K_n e M_n il *numero dei triangoli* e dei *nodi*, rispettivamente. Queste due successioni sono strettamente connesse. Infatti, le sequenze K_n e M_n soddisfano alle ricorrenze

$$\begin{aligned} K_0 &= 1 \\ K_n &= 4K_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 3 \\ M_{n+1} &= M_n + 3K_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Per lo schema di suddivisione regolare il numero dei nodi è calcolato attraverso la ricorrenza

$$\begin{aligned} V_0 &= 1 \\ V_n &= \binom{2^{n-1} + 2}{2} \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

La ricorrenza (2.2.5) può essere usata per calcolare il *minimo numero di punti necessari a determinare i coefficienti del polinomio interpolante di grado n in due variabili su un triangolo*. Questa asserzione può essere verificata notando che un polinomio multivariato

può essere descritto come combinazione di monomi della forma

$$b_i(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d (x_k)^{n_k} \quad (2.2.6)$$

dove d indica la dimensione dello spazio e $\sum_{k=1}^d n_k \leq n$, cosicchè b_i è un polinomio di grado $\leq n$. Ciò dipende dal particolare insieme di punti che è disponibile (vedi [59]). In ogni caso, il numero minimo m di punti richiesto per specificare un polinomio in d variabili è $m = K_{n,d} = \frac{(n+d)!}{n!d!}$. Per $d = 2$ e $n = 2^{k-1}$ otteniamo l'espressione (2.2.5). Deduciamo due considerazioni

- (i) Lo splitting irregolare può essere usato per determinare univocamente il polinomio interpolante su un triangolo per polinomi fino al secondo grado. Infatti, $M_n = V_n$ solo se $n = 1, 2$.
- (ii) Per $n > 2$ lo splitting irregolare al passo n -esimo, può essere usato per la costruzione di polinomi interpolanti *incompleti* di grado $n + 2$. Per esempio, per $n = 3$ abbiamo $M_3 = 18$. Per un tale insieme di nodi si hanno 3 condizioni in più rispetto a quelle necessarie a costruire un polinomio di grado 4 ma tre in meno per la costruzione di un polinomio di grado 5. Spesso nella costruzione di funzioni di forma per metodi agli elementi finiti, uno deve considerare polinomi incompleti di ordine più alto rispetto al problema da risolvere. Tali elementi sono noti con il nome di *elementi non-conformi*. Questo tipo di elementi si inflettono meglio e sono più adattabili di quelli conformi. Per meshes non raffinate le soluzioni “displacement e stress” sono abbastanza accurate e la soluzione con meshes più fini converge allo stesso risultato. Un esempio di elemento non conforme è l'elemento di *Bell-Argyris*. Questo ha 18 gradi di libertà invece dei 21 richiesti dall'originale elemento di Argyris.

2.3 Unisolvenza

Nella costruzione di funzioni polinomiali per approssimare ad esempio la soluzione di un certo problema differenziale, la prima richiesta è di sapere *a priori* se il problema d'interpolazione ha soluzione e se questa è unica. Questo si traduce chiedendo che il problema sia *unisolvente*. Formalmente, sia \mathcal{V} uno spazio lineare di dimensione finita k e \mathcal{V}^* il suo duale algebrico. Siano $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_p\}$ un sottoinsieme di p elementi di \mathcal{V}^* e $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_p\}$ un insieme di reali. Risolvere il problema di interpolazione

$$\mathcal{L}v = \mathcal{Z} \quad (2.3.1)$$

significa trovare $v \in \mathcal{V}$ tale che

$$l_i(v) = z_i \quad i = 1, \dots, p.$$

DEFINIZIONE 2.3.1 Diciamo che lo schema di interpolazione \mathcal{L} è \mathcal{V} -unisolvante (o unisolvente sull'insieme \mathcal{V}) se (2.3.1) ha soluzione e questa è unica.

PROPOSIZIONE 2.3.1 Uno schema \mathcal{L} è \mathcal{V} -unisolvante se e solo se l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{L}} &: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ v &\longmapsto \mathcal{L}v \end{aligned}$$

è iniettiva.

DIM.: Se \mathcal{L} è \mathcal{V} -unisolvante, esiste un unico $v \in \mathcal{V}$ per cui $l_i(v) = z_i, \forall i$. Allora per ogni $v^* \neq v$ si ha $l_i(v^*) \neq l_i(v)$ per almeno un indice j . Ciò implica che $\Psi_{\mathcal{L}}$ è iniettiva. Viceversa se $\Psi_{\mathcal{L}}$ è iniettiva, allora esiste un unico $v \neq 0$ t.c. $l_i(v) = z_i, \forall i$. Da cui segue, per definizione, che \mathcal{L} è \mathcal{V} -unisolvante. ■

In particolare, se $B_{\mathcal{V}} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ è una base per \mathcal{V} e quindi

$$v = \sum_{i=1}^m a_i \beta_i$$

allora (2.3.1) è equivalente

$$\sum_{i=1}^m a_i l_j(\beta_i) = z_j \quad j = 1, \dots, p \quad (2.3.2)$$

e (2.3.2) ha soluzione se e solo se $\text{span}\{l_i\} = \mathcal{V}^*$. Assumendo che $m = p$ e che le l_i sono linearmente indipendenti, la soluzione di (2.3.1), se c'è, può scriversi sotto forma (vedi [17])

$$u = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ z_1 & l_1(\beta_1) & \dots & l_1(\beta_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m & l_m(\beta_1) & \dots & l_m(\beta_m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1, \dots, l_m \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{vmatrix}} \quad (2.3.3)$$

Nota: Il denominatore è diverso da zero se (2.3.1) è unisolvente.

Osservazione. Se scegliamo la base $B_{\mathcal{V}}$ tale che $l_i(\beta_j) = \delta_{ij}$, allora le $\{\beta_i\}$ sono dette un insieme di funzioni di base per lo schema \mathcal{L} .

Un teorema di Haar (vedi [17] pag. 32) ci ricorda che in ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, esiste almeno un insieme non unisolvente ed esistono infiniti insiemi unisolventi.

Questo suggerisce che nella ricerca della soluzione del problema di interpolazione su un certo spazio lineare, ci sono molte scelte di punti da considerare e condizioni a cui desideriamo che l'interpolante soddisfi. In letteratura sono stati fatti molti lavori per la ricerca di condizioni di unisolvenza o per la costruzione di insiemi unisolventi. Nei paragrafi che seguiranno considereremo diversi esempi di insiemi unisolventi per lo spazio dei polinomi a valori reali, per ora ci occupiamo di dare delle condizioni generali di unisolvenza in \mathbb{R}^s , $s \geq 2$.

1. Unisolvenza in \mathbb{R}^2

Lo strumento indispensabile è il teorema di Bezout, che come noto vale nello spazio proiettivo per ogni $s > 0$, mentre non vale in spazi affini.

TEOREMA 2.3.1 (di Bezout). *Due curve algebriche di grado m_1 e m_2 rispettivamente, senza componenti comuni, hanno esattamente $m_1 m_2$ zeri reali o complessi.*

COROLLARIO 2.3.1 *Se p è un polinomio di grado k avente L radici a_i di molteplicità m_i su una retta di equazione $d(x) = 0$ e $\sum_{l=1}^L m_i > k$ allora esiste un polinomio p_1 di grado $\leq k - 1$ tale che $p = d \cdot p_1$.*

Di questo risultato faremo uso in seguito per dedurre un algoritmo per calcolare l'interpolante su un triangolo (vedi Appendice A.1).

PROPOSIZIONE 2.3.2 *Siano A_1, A_2, A_3 tre punti del piano \mathbb{R}^2 non allineati. Lo schema di interpolazione associato alle condizioni*

$$\partial^\alpha v(A_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad |\alpha| \leq k \quad (2.3.4)$$

l_i , $i = 1, 2, \dots, \binom{k+1}{2}$ è $(2k+1)$ -unisolvente² se e solo se per tutti i polinomi p di grado $2k-2$, tali che ciascun A_i è di molteplicità $k+1$, esiste almeno un l_i tale che $l_i(p) \neq 0$.

DIM.: Vedi [43]. ■

²Intendendo con ciò che la soluzione del problema di interpolazione soddisfacente alle (2.3.4), è un polinomio di grado $2k+1$

2. Unisolvenza in \mathbb{R}^s , $s > 2$

È ben noto che il teorema di Bezout non si può applicare per $s \geq 3$. Un banale esempio si ha considerando un iperboloide e un piano. La loro intersezione ha un insieme infinito di zeri.

Useremo invece il seguente risultato, estensione s dimensionale del Corollario 2.3.1.

PROPOSIZIONE 2.3.3 *Sia $p \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^s)$. Se $p|_H \equiv 0$, ove H è un iperpiano di equazione $h(x) = 0$, allora esiste un unico polinomio $q \in \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{R}^s)$ tale che $p = q \cdot h$.*

Detto altrimenti, la restrizione di un polinomio di grado k in s variabili ad ogni iperpiano di \mathbb{R}^s , è ancora un polinomio di grado k ma in $s - 1$ variabili.

COROLLARIO 2.3.2 *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^s$ un insieme di $\frac{(s+k)!}{s!k!}$ punti. Se esistono $k + 1$ iperpiani H_0, \dots, H_k tali che $\Sigma \cap H_i$ è unisolvente in $\mathbb{P}_i(\mathbb{R}^{s-1})$ $i = 0, 1, \dots, k$ allora è unisolvente in $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^s)$.*

Risultati circa la molteplicità di punti di interpolazione in \mathbb{R}^s come nella proposizione 2.3.2 si estendono facilmente. Ad esempio, nel caso $s = 3$ vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.3.4 *Siano A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ i vertici del tetraedro standard (3-simplex) e B_i un qualsiasi punto appartenente alla faccia del tetraedro opposta al vertice A_i . Lo schema \mathcal{L} che soddisfa le condizioni*

$$\partial^\alpha v(A_i) \quad |\alpha| \leq k \tag{2.3.5}$$

$$\partial^\alpha v(B_i) \quad |\alpha| \leq k - 1 \tag{2.3.6}$$

è $(2k + 1)$ -unisolvente in \mathbb{R}^3 .

DIM.: Vedi [42, 43]. ■

Un'ultima definizione.

DEFINIZIONE 2.3.2 *Due schemi interpolatori*

$$\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_m\} \in \mathcal{V}^*$$

e

$$\mathcal{L}' = \{l'_1, \dots, l'_m\} \in \mathcal{V}^*$$

sono \mathcal{W} -intercambiabili se sono entrambi \mathcal{W} -unisolventi e $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

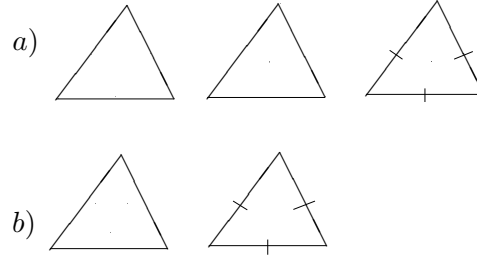


Fig. 2.5: Esempio di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^2)$ intercambiabilità: a) insiemi intercambiabili in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$ b) insiemi non intercambiabili in $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$

Esempio 2.3.1 Un esempio è evidenziato in fig. 2.5.

Quest’ultima definizione ci permette di osservare che per avere uno schema interpolante m -unisolvante su un triangolo, basta individuare su di esso o una distribuzione simpliciale di nodi (vedi fig.2.3 e fig. 3.1) oppure si impongono delle “condizioni di molteplicità” su certi nodi del triangolo. Ciò che si richiede è che i due schemi siano intercambiabili rispetto allo spazio polinomiale in cui cerchiamo la soluzione. Imponendo condizioni di molteplicità si parla di interpolazione di Hermite (od *osculatoria*) altrimenti di interpolazione di Lagrange.

2.4 Esistenza e unicità dell’interpolante su simplices

Introduciamo una classe di elementi simpliciali che possono essere descritti come

$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j T_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \right\} \quad (2.4.1)$$

dove al solito, T_j sono i vertici del simplex e λ_j sono le coordinate baricentriche del punto x .

DEFINIZIONE 2.4.1 Un *lattice principale di ordine p su E_n* è l’insieme

$$\mathcal{L}_{p,n}(E_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j T_j, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \quad e \quad \lambda_j \in A_p \right\} \quad (2.4.2)$$

dove $A_p = \{0, \frac{1}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, 1\}$.

PROPOSIZIONE 2.4.1 $\mathcal{L}_{p,n}(E_n)$ ha $\binom{p+n}{p}$ elementi.

DIM.: Dimostriamo per induzione su p .

$p = 1$. In questo caso $A_1 = \{0, 1\}$. Gli unici valori assunti dagli α_j sono 0 o 1. Ma poiché la loro somma deve essere 1, possiamo costruire solo le $(n+1)$ -ple $(0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$, $j =$

$1, \dots, n+1$. Ma $n+1 = \binom{n+1}{1}$.

$p > 1$. Sappiamo che

$$\binom{n+p}{p} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+p-j}{p-1}.$$

Per l'ipotesi induttiva si conclude. ■

Si può osservare inoltre, che la cardinalità di $\mathcal{L}_{p,n}(E_n)$ è l'insieme di tutte le $(n+1)$ -ple di "lunghezza" 1 e tali che $\alpha_j \in A_p$, $j = 1, \dots, n+1$. Ma questo numero è ben noto essere $K_{n,p} = \binom{n+p}{p}$.

Il problema di interpolazione polinomiale su $\mathcal{L}_{p,n}(E_n)$ è **unisolvante**. Vale infatti il seguente teorema [51].

TEOREMA 2.4.1 Sia E_n un n -simplex di vertici T_j , $j = 1, \dots, n+1$. Per ogni intero $p \geq 1$, ogni polinomio $q \in \mathbb{P}_p(\mathbb{R}^n)$ è univocamente determinato dai suoi valori su $\mathcal{L}_{p,n}(E_n)$.

DIM.: Usiamo induzione su n .

Per $0 \leq j \leq p$, $j \in \mathbb{N}$, consideriamo l'iperpiano

$$\Gamma_{n-1,j} = \left\{ x \mid x = \frac{j}{p}T_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{i+1} \right\}$$

con $\frac{j}{p} + \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \in A_p$. $\Gamma_{n-1,j}$ è parallelo alla faccia del simplex opposta a T_1 .

Intersecandolo con i lati di E_n , che sono $n+1$, si ottengono i punti del lattice

$$\lambda_0 = \frac{j}{p}, \quad \lambda_i = 1 - \frac{j}{p} \quad i = 1, \dots, n$$

ovvero i punti

$$Y_i = \binom{j}{p} T_1 + \left(1 - \frac{j}{p}\right) T_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4.3)$$

Questi n punti generano un $(n-1)$ -simplex, E_{n-1} .

Proviamo che $\mathcal{L}_{p-1, n-1}(E_{n-1})$ coincide con la parte di $\mathcal{L}_{p, n}(E_n)$ che sta su $\Gamma_{n-1, j}$. Infatti,

$$\mathcal{L}_{p-j, n-1}(E_{n-1}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \mu_i Y_i, \mu_i = \frac{I_i}{p-j}, 0 \leq I_i \leq p-j, \sum_{i=1}^n \mu_i = 1 \right\}$$

dove I_i è un intero tale che se $x \in \mathcal{L}_{p-j, n-1}$, facendo uso di (2.4.3), si ha

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\binom{j}{p} T_1 + \left(1 - \frac{j}{p}\right) T_{i+1} \right] \\ &= \binom{j}{p} T_1 + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(1 - \frac{j}{p}\right) T_{i+1} \\ &= \binom{j}{p} T_1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_i}{p-j} \cdot \frac{p-j}{p} \right) T_{i+1} \\ &= \binom{j}{p} T_1 + \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{p} T_{i+1} \end{aligned}$$

Ma, per definizione, x è un punto che appartiene a $\mathcal{L}_{p, n}(E_n)$.

Facilmente si prova che $\mathcal{L}_{p-j, n-1}$ coincide con la parte di $\mathcal{L}_{p, n}$ che sta su $\Gamma_{n-1, j}$. A tal fine proviamo che il problema di interpolazione omogeneo (in cui la funzione da interpolare si annulla sui nodi) ha solo la soluzione nulla.

Per assurdo, supponiamo che per un certo $1 \leq k < n$, il problema abbia in $\mathcal{L}_{p, k}$ la soluzione $p_0 \in \mathbb{P}_p(\mathbb{R}^k)$. Allora, la restrizione q_0 di p_0 all'iperpiano $\Gamma_{k-1, 0}$ è un polinomio in $\mathbb{P}_p(\mathbb{R}^{k-1})$. Ma q_0 si annulla sui punti del lattice che stanno su $\Gamma_{k-1, 0}$ e quindi per l'ipotesi induttiva il solo elemento di $\Pi_p(\mathbb{R}^{k-1})$ con questa proprietà è il polinomio identicamente nullo, $q_0 \equiv 0$. Ma allora, per la Proposizione 2.3.3

$$p_0 = p_1 \eta_0$$

dove $p_1 \in \Pi_{p-1}(\mathbb{R}^k)$ e η_0 è lineare in x e a tale che $\eta_0(x) = 0$, $x \in \Gamma_{k-1, 0}$.

Consideriamo $\Gamma_{k-1, 1}$.

Poiché $\Gamma_{k-1, 1} \cap \Gamma_{k-1, 0} = \emptyset$, possiamo applicare a p_1 e $\Gamma_{k-1, 1}$ lo stesso ragionamento. Continuando avremo che

$$p_0 = C \cdot \prod_{i=0}^{p-1} \eta_i(x), \quad \text{con } C \text{ costante.}$$

Per concludere resta da considerare $\Gamma_{k-1, p}$. Ora $p_0(x)$ deve annullarsi in T_1 . Ciò implica che $C = 0$. Perciò se il problema omogeneo ha soluzione questa è necessariamente nulla. Inoltre, poiché zero è soluzione questa è unica.

Concludendo: il problema omogeneo k dimensionale è univocamente solubile se lo è quello $k - 1$ dimensionale. In particolare esso vale per $k = 1$. ■

Capitolo 3

Interpolazione lagrangiana: applicazioni ed estensioni

3.1 Introduzione

Scopo del presente capitolo è di capire come costruire polinomi interpolanti su triangoli e più generalmente su simplices. Presenteremo alcune tecniche di interpolazione che proveremo essere utilizzabili per la descrizione di funzioni di forma per il metodo degli elementi finiti. In forma di Taylor un *polinomio bivariato* di grado p si scrive

$$p(x, y) = \sum_{|\mathbf{r}| \leq p} \lambda_{\mathbf{r}} x^{r_1} y^{r_2} \quad (3.1.1)$$

con $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^2$, $|\mathbf{r}| = r_1 + r_2$ e $\lambda_{\mathbf{r}} = \lambda_{r_1} \lambda_{r_2}$. Questa scrittura è utile in particolare quando x, y denotano coordinate triangolari ([54]).

Usando *coordinate baricentriche*, la relazione (3.1.1) si riscrive

$$p(\mathbf{a}) = \sum_{|s| \leq p} \beta_s \mathbf{a}^s \quad (3.1.2)$$

con $s \in \mathbb{N}^3$, $|s| = s_1 + s_2 + s_3$ e al solito $\mathbf{a}^s = \alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2} \alpha_3^{s_3}$.

Consideriamo il caso in cui il polinomio $p(\mathbf{a})$ rappresenti una funzione di forma. Come osservato nell'Introduzione e nel precedente Capitolo, dato un triangolo di ordine $p \geq 1$ sul quale abbiamo individuato $m(p)$ punti, detti *odi*, la costruzione di una soluzione approssimata \tilde{u} di un problema differenziale mediante il metodo degli elementi finiti e usando elementi triangolari, si ottiene descrivendo ciascuna funzione di forma su detti elementi.

La i -esima funzione di forma di grado p , $N_i^{(p)}$, può essere descritta come *prodotto di polinomi di Lagrange* (vedi [67]), che in coordinate baricentriche scriveremo

$$N_i^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = l^{(p_1^{(i)})}(\alpha_1) l^{(p_2^{(i)})}(\alpha_2) l^{(p_3^{(i)})}(\alpha_3) \quad (3.1.3)$$

dove ciascuna $l^{(q)}(\alpha_i)$, $q \in \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\}$, è data dall'usuale prodotto

$$l^{(q)}(\alpha_i) = \frac{\prod_{j=0, j \neq q}^{n(j)} \alpha_i(x, y) - \alpha_i(x_j, y_j)}{\prod_{j=0, j \neq q}^{n(j)} \alpha_i(x_q, y_q) - \alpha_i(x_j, y_j)} \quad (3.1.4)$$

Come si nota immediatamente, (3.1.3) è del tipo (3.1.2).

La terna $(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})$ identifica il nodo i -esimo su \mathcal{T} . Ad esempio in fig. 2.1, il nodo T_1 è individuato dalla terna $(2, 0, 0)$, T_4 da $(1, 1, 0)$ e così via.

In generale per un triangolo di ordine p , sul lato congiungente i nodi T_1 e T_2 del triangolo originale avremo la sequenza di terne

$$(p, 0, 0), (p-1, 1, 0), \dots, (0, p, 0). \quad (3.1.5)$$

su quello congiungente T_2 con T_3

$$(0, p, 0), (0, p-1, 1), \dots, (0, 0, p). \quad (3.1.6)$$

e così via. In tal modo,

$$N_i^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 \iff \alpha_j = \alpha_j(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.7)$$

Naturalmente, espandendo (3.1.3), il massimo termine coinvolto è

$$\alpha_1^{(p_1)} \alpha_2^{(p_2)} \alpha_3^{(p_3)} \quad (3.1.8)$$

ove $p_1 + p_2 + p_3 = |p|$.

3.2 Schema di Neville-Aitken

Ci siamo posti il seguente problema:

Problema 1 *Esiste uno schema ricorrente per il calcolo di una funzione di forma polinomiale del tipo (3.1.2)?*

Il fatto che si desideri uno schema ricorrente e non semplicemente incrementale, verrà chiarito in seguito, quando si analizzeranno delle proprietà di questi schemi per la ricerca dell'interpolante (vedi Capitoli 5 e 6).

Una risposta al Problema 1 è l'algoritmo di **Neville-Aitken**. Nella sua forma originale, nel caso unidimensionale, esso permette di costruire il polinomio interpolante come una successione di interpolazioni lineari di polinomi di grado via via crescente. Formalmente

Algoritmo 3.1

1. Dato un insieme di punti in \mathbb{R}^2 , diciamo $\mathcal{S}_n = \{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n\}$;
2. Costruisci il polinomio di grado n interpolante su \mathcal{S}_n mediante

$$\begin{cases} P_i^0 = y_i \\ P_i^k(x) = \lambda_i^k(x)P_i^{k-1}(x) + \mu_i^k(x)P_{i+1}^{k-1}(x) \quad 1 \leq k \leq n \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-k \end{cases} \quad (3.2.1)$$

dove

$$\lambda_i^k(x) = \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_i} \quad \mu_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}. \quad (3.2.2)$$

Si noti che la formula ricorrente ora presentata, può estendersi a una formulazione di tipo estrapolatorio modificando gli indici k e i nel seguente modo: $1 \leq k \leq i$ e $i = 0, 1, 2, \dots$. Questa versione è usata soprattutto per calcolare il polinomio di interpolazione in $x = 0$ generando uno schema interpolante (colonna per colonna) di tipo *asimmetrico*.

Il polinomio interpolante ottenuto con lo schema di Neville-Aitken può scriversi più compattamente

$$P_i^k(x) = \sum_{j=i}^{i+k} \eta_{j,i}^k(x) y_j \quad (3.2.3)$$

Nota: i coefficienti $\eta_{j,i}^k(x)$, che rappresentano i *polinomi elementari di Lagrange* di grado k , sono legati ai polinomi $\lambda_i^k(x)$ e $\mu_i^k(x)$ da relazioni di ricorrenza, come è verificato in [20] (vedasi pure sezione 5.1).

3.2.1 Schema di Neville-Aitken per funzioni di forma su triangoli

Problema 2 *In quale modo possiamo estendere questa schema unidimensionale a funzioni di forma in coordinate baricentriche come in (3.1.2)?*

Presentiamo ora l'algoritmo da noi pensato per estendere lo schema (3.2.1) a funzioni di forma polinomiali in coordinate baricentriche.

Premesse. Dato un triangolo \mathcal{T} di ordine p , consideriamo un certo nodo $T_i = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})$ con $i = 1, \dots, m = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ e $p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + p_3^{(i)} = |p|$.

La nostra **congettura** è la seguente:

la funzione di forma $N_i^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ corrisponde a un polinomio di grado $p_1^{(i)}$ in α_1 , $p_2^{(i)}$ in α_2 e $p_3^{(i)}$ in α_3 .

Usando quindi la ricorrenza (3.2.1) e la proprietà che $N_i^{(p)}(T_j) = \delta_{ij}$, costruiamo i 3 polinomi elementari di Lagrange come segue.

Ad esempio, se $p = 2$ e $T_1 = (2, 0, 0)$ il polinomio che dovremo costruire sarà di secondo grado in α_1 e costante in α_2 e α_3 . Per calcolare $l^{(2)}(\alpha_1)$ prendiamo l'insieme $\mathcal{S}_2 = \{(2, 1), (1, 0), (0, 0)\}$.

In generale, se $T_i = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})$, costruiamo 3 diversi insiemi

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^{(i)} &= \{(p_1^{(i)}, 1), (p_1^{(i)} - 1, 0), \dots, (0, 0)\} \\ \mathcal{S}_2^{(i)} &= \{(p_2^{(i)}, 1), (p_2^{(i)} - 1, 0), \dots, (0, 0)\} \\ \mathcal{S}_3^{(i)} &= \{(p_3^{(i)}, 1), (p_3^{(i)} - 1, 0), \dots, (0, 0)\}\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

che ci consentiranno di determinare $l^{p_1^{(i)}}(\alpha_1)$, $l^{p_2^{(i)}}(\alpha_2)$ ed $l^{p_3^{(i)}}(\alpha_3)$. Se $p_j^{(i)} = 0$, per definizione $l^{p_j^{(i)}}(\alpha_j) = 1$, quindi $\mathcal{S}_j^{(i)} = \{(0, 1)\}$.

Algoritmo 3.2

1. Per $i = 1, \dots, m$ esegui {ciclo su tutti i nodi}
2. Dato $T_i = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})$ costruisci gli insiemi $\mathcal{S}_1^{(i)}$, $\mathcal{S}_2^{(i)}$ ed $\mathcal{S}_3^{(i)}$ come in (3.2.4).
3. Per $j = 1, 2, 3$, usando l'algoritmo di Neville-Aitken, calcola la j -esima componente lagrangiana di $N_i^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a partire da $\mathcal{S}_j^{(i)}$.

Alla fine avremo determinato tutte le funzioni di forma su un elemento triangolare di ordine p .

Osservazioni.

1. L'algoritmo 3.2 ha un inconveniente: richiede l'utilizzo dell'algoritmo di Neville-Aitken su **ogni** componente lagrangiana della funzione di forma (punto 3.).
2. L'Algoritmo precedente si può facilmente estendere al caso multivariato $n > 2$, considerando $n + 1$ insiemi formati da multiindici n dimensionali del tipo (3.2.4).

Concludiamo il paragrafo, osservando che con l'Algoritmo 3.2 abbiamo ottenuto uno schema di calcolo per funzioni di forma e quindi per polinomi interpolanti su triangoli o su simplices. Purtroppo esso non generalizza completamente lo schema di N-A. Nella sezione che segue risolveremo quest'ultimo problema.

3.3 Schema di Neville-Aitken generalizzato

La domanda d'obbligo che ci si pone è dunque:

Problema 3 *Esiste uno schema di N-A per polinomi multivariati e in particolare per polinomi in coordinate baricentriche?*

La risposta è anzitutto affermativa. Osserviamo inoltre che l'attenzione rivolta allo schema di N-A è giustificata dal fatto che non è necessario calcolare differenze divise, come nello schema di Newton, riducendo di gran lunga la complessità dell'algoritmo di calcolo del polinomio interpolante.

Nel corso degli ultimi anni, l'algoritmo è stato esteso a problemi di interpolazione generalizzata (vedi ad esempio [9, 34, 49]). Sfortunatamente l'applicazione di questi risultati è difficile nel caso multidimensionale su problemi definiti su insiemi di nodi "complessi".

Thacher e Milne in [59] proposero un metodo per determinare un polinomio multivariato, osservando che esso è riconducibile allo schema di N-A. Provarono che il polinomio di grado m , $p_m \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s)$, soluzione di un problema di interpolazione su un insieme S di $\frac{(m+s)!}{m!s!}$

punti di \mathbb{R}^s , può essere costruito dalle soluzioni p_{m-1}^i di $s+1$ problemi di interpolazione in $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^s)$ su qualche sottoinsieme S_i di S ($1 \leq i \leq s+1$). Inoltre p_m è ottenibile come quoziente di due determinanti di ordine $s+1$. In particolare per $s=1$ si riottenne lo schema di N-A univariato. Poiché le ipotesi in [59] erano molto restrittive, l'unico esempio di applicazione della loro tecnica fu l' s -simplex.

Gasca e Lebrón in [35] estesero il lavoro di Thacher e Milne fornendo un approccio più generale. Mostrarono che il numero di problemi più semplici da risolvere (necessari) per ottenere il polinomio interpolante *dipende dalla distribuzione dei nodi*. In generale essi non sono solo $s+1$. Vista l'importanza di detto risultato, desideriamo presentarlo anche per successive applicazioni.

3.3.1 Applicazioni dello schema di N-A generalizzato

Indichiamo con

$$p(x) = \sum_{j=1}^k \omega_j(x) p_j(x) \quad (3.3.1)$$

la *soluzione del problema di interpolazione*, dove $p_j(x)$, $1 \leq j \leq k$ sono le soluzioni di k problemi più semplici e i "pesi" $\omega_j(x)$ sono le funzioni di Lagrange di un altro problema, detto "problema connesso".

Per inciso, se in (3.3.1) prendiamo $k=2$, si ha che $\omega_j(x)$, $j=1,2$ sono polinomi lineari dati al solito da $\omega_1(x) = \frac{x_{j+l} - x}{x_{j+l} - x_j}$ e $\omega_2(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+l} - x_j}$, $1 \leq l \leq m$.

Denotiamo con $S = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ un insieme di $m \geq 1$ punti di \mathbb{R}^s e con S_j , $1 \leq j \leq k$, k sottoinsiemi di S , $1 \leq k \leq m$ tali che

$$(i) \quad S = \bigcup_{j=1}^k S_j;$$

(ii) per ogni $j = 1, \dots, k$ la cardinalità di S_j è $|S_j| = q$ ($0 < q < m$);

(iii) esistono k punti in S , diciamo X_1, \dots, X_k , tali che per ogni $j = 1, \dots, k$

$$X_j \in S_j, \quad X_j \notin \bigcup_{l=1, l \neq j}^k S_l \quad (3.3.2)$$

Notiamo che la richiesta in (3.3.2) era già ammessa da Thacher e Milne nella costruzione dell'interpolante e più di recente da Walz [60] per la descrizione di un algoritmo che permetteva di calcolare le splines su un triangolo con nodi distribuiti sui lati. L'“essenza” della relazione (3.3.2) sta nel fatto che essa rende il denominatore del rapporto di determinanti diverso da zero. Daremo maggiori dettagli nel seguito. Il primo problema è dimostrare l'unicità dello schema (3.3.1) nello spazio dei polinomi.

Scopo: dare delle condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità di un polinomio $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s)$ interpolante su S , ovvero

$$p(X_i) = f(X_i) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.3.3)$$

ove f è una data funzione (definita su S), in termini dell'esistenza e unicità di k problemi associati agli insiemi S_j , rispettivamente.

Indichiamo con \mathcal{R} un sottospazio di dimensione k di polinomi a valori in \mathbb{R}^s , tale che

(iv) i polinomi costanti stanno in \mathcal{R} ;

(v) per ogni funzione f esiste un **unico** polinomio $u \in \mathcal{R}$ tale che

$$u(X_i) = f(X_i), \quad 1 \leq i \leq k \quad (3.3.4)$$

(vi) per ogni $j = 1, \dots, k$ il polinomio $\omega_j \in \mathcal{R}$ definito

$$\omega_j(X_l) = \delta_{jl} \quad 1 \leq l \leq k \quad (3.3.5)$$

soddisfa la condizione

$$r > k \text{ e } X_r \notin S_j \implies \omega_j(X_r) = 0 \quad (3.3.6)$$

Infine, indichiamo con \mathcal{Q} un sottospazio polinomiale di dimensione q di $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s)$ tale che

$$(vii) \quad \mathcal{R}\mathcal{Q} = \{f = wg \mid w \in \mathcal{R}, g \in \mathcal{Q}\} \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s);$$

(viii) per ogni f e $1 \leq j \leq k$ esiste un unico polinomio $p_j \in \mathcal{Q}$ tale che

$$p_j(X_l) = f(X_l) \quad \forall X_l \in S_j \quad (3.3.7)$$

TEOREMA 3.3.1 ([35])

Sotto le ipotesi (i)-(viii), per ogni $f \in \mathcal{F}$ (dove \mathcal{F} è uno spazio vettoriale delle funzioni a valori reali definite su $D \subset \mathbb{R}^s$) esiste un unico polinomio $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s)$ soddisfacente (3.3.3) che può essere scritto

$$p = \sum_{j=1}^k \omega_j p_j \quad (3.3.8)$$

dove $p_j \in \mathcal{Q}$ ($\omega_j \in \mathcal{R}$) soddisfa (3.3.7) (rispettivamente (3.3.5)).

DIM.: La condizione (3.3.7) implica che p definito in (3.3.8) appartiene a $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}^s)$ e per $l = 1, \dots, k$ (3.3.3) è una diretta conseguenza di (iii), (3.3.5) e (3.3.7).

Consideriamo $k < l \leq m$ e sia r ($1 \leq r \leq k$) il numero di sottoinsiemi S_j tali che $X_l \in S_j$. Dopo rinumerazione di $1, 2, \dots, k$ possiamo osservare che

$$X_l \in S_j \quad j = 1, \dots, r \quad (3.3.9)$$

e se $r < k$

$$X_l \notin S_j \quad j = r+1, r+2, \dots, k \quad (3.3.10)$$

Da (3.3.6) e (3.3.7) abbiamo

$$\sum_{j=1}^k \omega_j(X_l) p_j(X_l) = f(X_l) \sum_{j=1}^r \omega_j(X_l). \quad (3.3.11)$$

Ma da (iv),(v) e (vi) sappiamo che

$$\sum_{j=1}^k \omega_j = 1$$

e quindi (3.3.6) e (3.3.10) implicano che

$$\sum_{j=1}^r \omega_j(X_l) = 1. \quad (3.3.12)$$

Perciò in (3.3.11)

$$\sum_{j=1}^k \omega_j(X_l) p_j(X_l) = f(X_l). \quad (3.3.13)$$

Infine, poiché il problema ha sempre *una* soluzione questa è necessariamente unica. ■

Osservazioni

1. La condizione (vi) può essere scritta equivalentemente assumendo che $\{u_1, \dots, u_k\}$ sia una base di \mathcal{R} . Allora da $r > k$, $X_r \notin S_j$ si ha

$$\begin{vmatrix} u_1(X_1) & u_2(X_1) & \dots & u_k(X_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(X_{j-1}) & u_2(X_{j-1}) & \dots & u_k(X_{j-1}) \\ u_1(X_r) & u_2(X_r) & \dots & u_k(X_r) \\ u_1(X_{j+1}) & u_2(X_{j+1}) & \dots & u_k(X_{j+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(X_k) & u_2(X_k) & \dots & u_k(X_k) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.14)$$

Similmente, possiamo scrivere il polinomio interpolante nella forma (vedi ancora [59]):

$$p(X) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_1(X) & u_2(X) & \dots & u_k(X) \\ p_1(X) & u_1(X_1) & u_2(X_1) & \dots & u_k(X_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_k(X) & u_1(X_k) & u_2(X_k) & \dots & u_k(X_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(X_1) & u_2(X_1) & \dots & u_k(X_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(X_k) & u_2(X_k) & \dots & u_k(X_k) \end{vmatrix}} \quad (3.3.15)$$

2. L'interesse del Teorema 3.3.1 e dell'espressione (3.3.15) sta nella possibilità di risolvere un particolare problema di interpolazione con una tecnica ricorsiva. D'altra parte sembra che solo distribuzioni di punti *molto speciali* permettano il loro utilizzo.

Diamo ora due esempi in \mathbb{R}^2 di distribuzioni di punti a cui può applicarsi il Teorema 3.3.1.

Esempio 3.3.1 Come in [37] consideriamo in \mathbb{R}^2 una distribuzione simpliciale di punti (vedi fig. 3.1) del tipo

$$S_{m,q} = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), \dots, (x_0, y_m), (x_1, y_1), \dots, (x_1, y_m), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1}), (x_{m-1}, y_m), (x_m, y_m)\}$$

ove $x_j = q^j x_0$, $y_j = q^j y_0$ con q fissato e tale che $0 < q < 1$. Denotando con $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^2)$ i polinomi che interpolano una funzione definita sui sottoinsiemi, soddisfacenti a (i), (ii) e (iii)

$$S_{m,q}^0 = \{(x_0, y_0), \dots, (x_0, y_{m-1}), (x_1, y_1), \dots, (x_1, y_{m-1}), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})\}$$

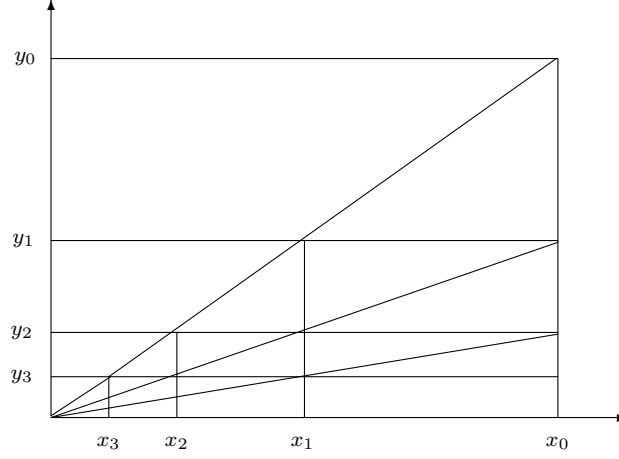


Fig. 3.1: Distribuzione di tipo simpliciale con $q = \frac{1}{2}$ ed $m = 3$.

$$S_{m,q}^1 = \{(x_1, y_1), \dots, (x_1, y_m), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_m), \dots, (x_m, y_m)\}$$

$$S_{m,q}^2 = \{(x_0, y_1), \dots, (x_0, y_m), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_m), \dots, (x_{m-1}, y_m)\}$$

e con $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^2)$ il polinomio interpolante f su $S_{m,q}$ si ha

$$p(x) = \left(\frac{y - y_m}{y_0 - y_m} \right) p_0(x) + \left(\frac{x - x_0}{x_m - x_0} \right) p_1(x) + \left(\frac{y - y_m}{y_0 - y_m} - \frac{x - x_0}{x_m - x_0} \right) p_2(x) \quad (3.3.16)$$

◇◇◇

Come facilmente si verifica un lattice principale di ordine p è ancora una distribuzione simpliciale di punti. Essi si ottengono, intersecando piani equispaziati di passo $\frac{1}{p}$ paralleli alle facce del simplex.

Esempio 3.3.2 Consideriamo un insieme S di m punti in \mathbb{R}^2 e una funzione $f : (S \subset)D_f \rightarrow \mathbb{R}$ da interpolare sui punti di S con un polinomio p . Per ciascun punto X_i di S prendiamo una retta r_i parallela ad una arbitraria ma fissata direzione. Essa si descriverà come un polinomio lineare del tipo

$$r_i \equiv ax + by + c_i = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.3.17)$$

Sceglieremo i coefficienti a e b (quindi la direzione a cui essa è parallela) cosicchè l'insieme $T = \{r_1, r_2, \dots, r_t\}$, ($t \leq m$) di rette distinte contenga k ($k \geq 2$) rette $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ tali che, detta $n_i = \text{card}(r_i \cap S)$, si abbia

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k \geq n_{k+1} \geq \dots \geq n_t. \quad (3.3.18)$$

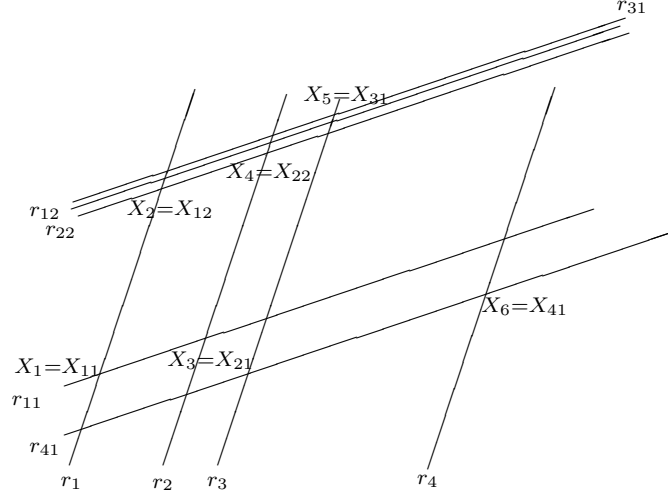


Fig. 3.2: *Insieme unisolvente sullo spazio dei polinomi $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.*

Siano X_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$ i punti di S che appartengono a r_i , $1 \leq i \leq t$, vedi fig. 3.2 per il caso $m = 6$ e $k = 2$. Per X_{ij} prendiamo la retta r_{ij} parallela ad una direzione diversa da quella di r_i , sia essa

$$r_{ij} \equiv dx + ey + c_{ij} = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.3.19)$$

In [36] è provato che il problema di interpolazione Lagrangiana su S è unisolvente nello spazio polinomiale

$$\mathbb{P} = \text{span} \left\{ \left(\prod_{h=1}^{i-1} r_h \right) \cdot \left(\prod_{s=1}^{j-1} r_{is} \right), \quad i = 1, 2, \dots, t; \quad j = 1, 2, \dots, n_i \right\} \quad (3.3.20)$$

(Si conviene che il prodotto è 1 se i o j sono 1).

Da (3.3.17) e (3.3.19) segue che \mathbb{P} è anche generato dal seguente spazio

$$\mathbb{P} = \text{span} \left\{ r_1^{i-1} \cdot r_{11}^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, t; \quad j = 1, 2, \dots, n_i \right\} \quad (3.3.21)$$

Questo segue dalla scelta delle rette r_i e r_{ij} parallele a r_1 e r_{11} rispettivamente.

Per applicare il Teorema 3.3.1, prendiamo per X_i i punti di S che stanno su r_i , $1 \leq i \leq k$. Rinumerando i restanti punti X_{k+1}, \dots, X_m e denotando

$$S_i = S \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^k r_j$$

otteniamo

$$\mathcal{R} = \text{span}\{1, r_1, \dots, r_1^{k-1}\}$$

$$\mathcal{Q} = \text{span}\{r_1^{i-k} r_1^{j-1}, i = k, k+1, \dots, t; j = 1, 2, \dots, n_i\}$$

Tutte le condizioni valgono e quindi

$$p(x) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & r_1(x) & \dots & r_1^{k-1}(x) \\ p_1(x) & 1 & r_1(x_1) & \dots & r_1^{k-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k(x) & 1 & r_1(x_k) & \dots & r_1^{k-1}(x_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1(x_1) & \dots & r_1^{k-1}(x_1) \\ 1 & r_1(x_2) & \dots & r_1^{k-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_1(x_k) & \dots & r_1^{k-1}(x_k) \end{vmatrix}} \quad (3.3.22)$$

Nel caso $k = 2$ riotteniamo le formula di N-A univariata

$$p(x) = p_2(x) \left(\frac{r_1(x) - r_1(x_1)}{r_1(x_2) - r_1(x_1)} \right) + p_1(x) \left(\frac{r_1(x_2) - r_1(x)}{r_1(x_2) - r_1(x_1)} \right) \quad (3.3.23)$$

◇◇◇

Conclusioni

Dall'esempio 3.3.1 di questa sezione, possiamo concludere che un lattice principale di ordine m è un insieme unisolvente per polinomi multivariati riottenendo il risultato del Teorema 2.4.1. Inoltre il polinomio interpolante è calcolabile con lo schema di N-A multivariato, che introdurremo al Capitolo 6. È questa la ragione che ci ha spinto a considerare il lattice principale (di fissato ordine) quale insieme di punti su cui basarci per la costruzione del polinomio interpolante su simplices.

3.4 Sistemi di Tchebycheff e schema di N-A generalizzato

Nella presente sezione analizzeremo due aspetti della teoria dei sistemi di Tchebycheff.

1. La connessione fra le proprietà dei determinanti formati a partire da un insieme di funzioni $\mathcal{F}_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ che formano un insieme di Tchebycheff e il numero di zeri o di cambiamenti di segno che posseggono delle loro combinazioni lineari.
2. I sistemi di Tchebycheff permettono di generalizzare schemi di interpolazione classici quali lo schema di N-A.

Siano $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{K} un campo commutativo di caratteristica zero e G un insieme di punti, che per ora assumeremo in \mathbb{R} , di cardinalità almeno n . Al solito, $|G|$ indica la sua cardinalità.

DEFINIZIONE 3.4.1 Un insieme di funzioni continue $\mathcal{F}_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ soddisfa la condizione di Haar su G se ogni determinante

$$H_{\mathcal{F}_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (3.4.1)$$

definito sull'insieme di punti distinti $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$ è **non nullo**.

DEFINIZIONE 3.4.2 Un insieme di funzioni $\mathcal{F}_n = \{f_1, \dots, f_n\}$ ove $f_j : G \rightarrow \mathbb{K}$ è detto un **\mathbb{K} sistema di Tchebycheff su G** (nel seguito \mathbb{K} -ST) se e solo se verifica la condizione di Haar su G (3.4.1).

Per un sistema di Tchebycheff vale il seguente teorema che lo caratterizza in termini dei cambiamenti di segno.

TEOREMA 3.4.1 Se $\mathcal{F}_n = \{f_i\}_1^n$ è un \mathbb{K} -ST su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, allora

$$\zeta_1 \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \leq n - 1 \quad (3.4.2)$$

per tutti i numeri reali non tutti nulli c_1, \dots, c_n con la funzione $\zeta_1(\cdot)$ che indica il numero di zeri semplici su I .

Viceversa, se $\mathcal{F}_n = \{f_i\}_1^n$ è un insieme di funzioni che soddisfa (3.4.1), allora sia \mathcal{F}_n che $\tilde{\mathcal{F}}_n = \{f_1, \dots, f_{n-1}, -f_n\}$ sono un \mathbb{K} -ST.

DIM.: Dalla discussione del problema generale di interpolazione lagrangiana, sappiamo che è possibile determinare n costanti c_1, \dots, c_n tali che $\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$ su n punti x_1, \dots, x_n se e solo se $H_{\mathcal{F}_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$. Ma allora \mathcal{F}_n è un \mathbb{K} -ST.

Viceversa, se vale (3.4.2), allora $H_{\mathcal{F}_n}(x_1, \dots, x_n)$ non può mai essere zero. Poiché $H_{\mathcal{F}_n}(x)$ è una funzione continua, essa deve cambiare segno per ogni $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in I$. Deduciamo quindi che o \mathcal{F}_n oppure $\tilde{\mathcal{F}}_n$ è un \mathbb{K} -ST. ■

Esempio 3.4.1 Il più semplice esempio di \mathbb{K} -ST è l'insieme delle funzioni potenza $\Xi_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$. In tal caso il determinante (3.4.1) si riduce a quello di Vandermonde. In particolare se gli x_i sono tutti diversi, allora (3.4.1) è pure positivo.



Esempio 3.4.2 Un altro esempio è l'insieme $\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos px, \sin px\}$ su $I = [0, 2\pi[$. Questo insieme **non** è un \mathbb{K} -ST su qualsiasi intervallo di ampiezza $> 2\pi$.



Osserviamo inoltre che la proprietà (3.4.2) rimane ancora valida se consideriamo gli zeri doppi ζ_2 della combinazione $\sum_{i=1}^n c_i f_i$ [55].

Introduciamo ora una sottoclasse di \mathbb{K} -ST che ha delle proprietà determinantali più strette.

DEFINIZIONE 3.4.3 *Dato un \mathbb{K} -ST, \mathcal{F}_n . Esso è detto **completo** se e solo se per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ il sottoinsieme $\{f_1, \dots, f_k\}$ di \mathcal{F}_n è un \mathbb{K} -ST. Indicheremo tali insiemi con \mathbb{K} -STC.*

L'insieme Ξ_n delle potenze è un \mathbb{K} -STC. Invece $T_1 = \{\cos x, \sin x\}$ in $[0, \pi[$ è un \mathbb{K} -ST ma non è completo. Infatti è sempre possibile trovare una combinazione di $\sin x$ e $\cos x$ che si annulla in $[0, \pi[$.

Esempio 3.4.3 Un esempio di insieme che **non** è un sistema di T. completo sono i polinomi di Bernstein, di cui ci occuperemo estesamente nel prossimo Capitolo. In $[-1, 1]$ con $n = 2$ essi sono $\{\frac{1}{4}(1-x)^2, \frac{1}{2}(1-x^2), \frac{1}{4}(x+1)^2\}$.



È ben noto che la differenza divisa di ordine n basata sull'insieme delle funzioni potenza (che è un \mathbb{K} -STC) $\Xi_{n+1} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ e sull'insieme di punti $T_{n+1} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di una funzione f a valori reali si può scrivere con il seguente rapporto di determinanti

$$f[t_0, \dots, t_n] = \frac{\begin{vmatrix} 1, x, \dots, x^{n-1}, f \\ t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, x, \dots, x^{n-1}, x^n \\ t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \end{vmatrix}} \quad (3.4.3)$$

Possiamo generalizzare le differenze divise ad un generico \mathbb{K} -STC, \mathcal{F} .

DEFINIZIONE 3.4.4 *Dato un \mathbb{K} -STC, $\mathcal{F}_{n+1} = \{f_0, \dots, f_n\}$ e una funzione f sufficientemente regolare, definiamo la sua differenza divisa di ordine n rispetto a \mathcal{F}_{n+1} ed a un insieme di punti $T_{n+1} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ come segue*

$$f_{\mathcal{F}_{n+1}}[t_0, \dots, t_n] = \frac{\begin{vmatrix} f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f \\ t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \\ t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \end{vmatrix}} \quad (3.4.4)$$

Anche nel caso delle differenze divise rispetto ad un \mathbb{K} -STC vale la ricorrenza [49]:

$$f_{\mathcal{F}_{n+1}}[t_0, \dots, t_n] = \frac{f_{\mathcal{F}_n}[t_1, \dots, t_n] - f_{\mathcal{F}_n}[t_0, \dots, t_{n-1}]}{f_{n, \mathcal{F}_n}[t_1, \dots, t_n] - f_{n, \mathcal{F}_n}[t_0, \dots, t_{n-1}]} \quad (3.4.5)$$

PROPOSIZIONE 3.4.1 Sia $\mathcal{F}_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ un insieme di funzioni $f_j : G \rightarrow \mathbb{K}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) \mathcal{F}_n è un \mathbb{K} -ST;

(ii) per ogni funzione $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ e ogni insieme $G_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset G$ con $|G_n| = n$, esiste un'unica combinazione lineare

$$\tilde{f} = p_n f \left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \end{array} \right] \quad (3.4.6)$$

tale che

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.7)$$

dove $p_n f \left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \end{array} \right]$ indica l'interpolante di f rispetto al \mathbb{K} -ST, \mathcal{F}_n .

DIM.: La dimostrazione si fa facendo uso della regola di Cramer. ■

In analogia con la formula di interpolazione di Newton, il coefficiente del monomio di grado massimo dell'interpolante $p_n f$ rispetto a \mathcal{F}_n è ottenuto generalizzando le differenze divise come fatto in (3.4.4).

DEFINIZIONE 3.4.5 L'errore di interpolazione è

$$r_n f := f - p_n f = r f \left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \end{array} \right] = \frac{\left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x \end{array} \right]}{\left| \begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \end{array} \right|} \quad (3.4.8)$$

Il seguente teorema generalizza lo schema di N-A per un sistema \mathcal{F}_n che è un \mathbb{K} -ST (vedi [49]).

TEOREMA 3.4.2 Dati $m, n \in \mathbb{N}$, consideriamo due \mathbb{K} -ST su un insieme G $\mathcal{F}_n = (f_1, \dots, f_n)$ e $\mathcal{F}'_{n+m} = (f_1, \dots, f_n, \dots, f_{n+m})$.

Allora per ogni funzione $f : G \rightarrow \mathbb{K}$, ogni $G_{n+m} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+m}\} \subset G$ tale che $|G_{n+m}| = n + m$ e ogni $x \in G$, vale la ricorrenza

$$p f \left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_n, \dots, f_{n+m} \\ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m} \end{array} \right] (x) = \sum_{j=0}^m \lambda_j(x) p f \left[\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_n \\ x_{j+1}, \dots, x_{j+n} \end{array} \right] (x) \quad (3.4.9)$$

dove i 'coefficienti' $(\lambda_j)_{j=0,\dots,m}$ sono funzioni indipendenti da f e tali che

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1 \quad \forall x \in G.$$

Posto

$$\begin{aligned} \gamma_{0,j} &= 1 \quad j = 0, \dots, m \\ \gamma_{k,j} &= r f_{n+k} \begin{bmatrix} f_1, f_2, \dots, f_n \\ x_{j+1}, \dots, x_{j+n} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j=0,\dots,m \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

allora $\forall x \in G \setminus \{x_2, \dots, x_{n+m-1}\}$

$$N(x) = \det(\gamma_{k,j}(x)) \neq 0 \quad j = 0, \dots, m \quad k = 0, \dots, m \quad (3.4.11)$$

e unicamente $\forall x \in G \setminus \{x_2, \dots, x_{n+m-1}\}$ e $j = 0, \dots, m$

$$\lambda_j(x) = \frac{(-1)^j}{N(x)} \det(\gamma_{k,l}(x)) \quad \begin{matrix} k=1,\dots,m \\ l=0,\dots,j-1,j+1,\dots,m \end{matrix} \quad (3.4.12)$$

dove per $x \in \{x_2, \dots, x_{n+m-1}\}$, i 'coefficienti' $\lambda_j(x) \in \mathbb{K}$ possono essere scelti cosicchè

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1 \quad (3.4.13)$$

se $m \geq 2$ e $p = 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \lambda_j(x_{n+p-1}) &= 0 \quad j=0,\dots,p-2 \\ \lambda_j(x_p) &= 0 \quad j=p,\dots,m \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

DIM.: Vedi [49]. Una dimostrazione alternativa basata sull'identità di Sylvester per i determinanti si trova in [8].■

Osservazione: sostituendo $f = f_{n+k}$ in (3.4.9) per $k = 1, \dots, m$ osserviamo che valgono le seguenti relazioni

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1 \quad (3.4.15)$$

$$\sum_{j=0}^m \gamma_{k,j}(x) \lambda_j(x) = 0 \quad k=1,\dots,m \quad (3.4.16)$$

Esempio 3.4.4 Consideriamo il caso in cui $n = 1$ e $m = 2$. Come sistema di T. completo prendiamo $\Xi_3 = \{1, x, x^2\}$. Dobbiamo così determinare un polinomio interpolante di grado 2 (ovvero ordine $n + m = 3$). La scelta di $m = 2$ richiede l'uso di N-A generalizzato (3.4.9) a *due passi*. Indichiamo i passi da eseguire

1. *Determinazione delle funzioni $\gamma_{k,j}$* ³.

Usando (3.4.10), dobbiamo costruire le funzioni $\gamma_{k,j}$ $k = 1, 2$ $j = 0, 1, 2$ date da

$$\gamma_{k,j} = r f_{1+k} \begin{bmatrix} f_1 \\ x_{j+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.17)$$

Esplicitamente

$$\begin{aligned} \gamma_{1,0} &= r f_2 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x - x_1 \\ \gamma_{1,1} &= r f_2 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x - x_2 \\ \gamma_{1,2} &= r f_2 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x - x_3 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2,0} &= r f_3 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x^2 - x_1^2 \\ \gamma_{2,1} &= r f_3 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^2 - x_2^2 \\ \gamma_{2,2} &= r f_3 \begin{bmatrix} f_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

In questo caso $N(x)$ è

$$N(x) = \begin{vmatrix} \gamma_{1,0} - \gamma_{1,1} & \gamma_{1,1} - \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,0} - \gamma_{2,1} & \gamma_{2,1} - \gamma_{2,2} \end{vmatrix} \quad (3.4.19)$$

che per (3.4.12)

$$N(x) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_2^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \quad (3.4.20)$$

$N(x)$ è indipendente da x : è semplicemente una costante.

2. *Determinazione delle funzioni $\lambda_j(x)$* $j = 0, 1, 2$.

Date le funzioni $\gamma_{k,j}(x)$ e N siamo in grado di determinare $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ e $\lambda_2(x)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda_0(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ \lambda_1(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ \lambda_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

³Il primo indice in $\gamma_{k,j}$ indica il grado del polinomio rappresentato.

3. *Verifichiamo (3.4.15) e (3.4.16).*

Le funzioni $\lambda_j(x)$ sono i polinomi di Lagrange, come facilmente si verifica. Quindi segue immediatamente che (3.4.15) vale. Anche (3.4.16) è verificata: omettiamo la prova poiché i calcoli sono lunghi e noiosi.

◇◇◇

Capitolo 4

Polinomi di Bernstein e loro applicazioni

4.1 Generalità sui polinomi di Bernstein

Un capitolo importante della teoria dell'approssimazione è dato dal teorema di Weierstrass. Come ben noto esso asserisce la possibilità di approssimare uniformemente una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ della retta reale tramite polinomi di grado “sufficientemente” elevato. Tra le varie dimostrazioni di questo teorema ce n'è una dovuta a Bernstein basata sui polinomi che da lui presero il nome. Anche se questa dimostrazione non è la più semplice essa è senza dubbio la più elegante ed inoltre fornisce una esplicita rappresentazione dei polinomi approssimanti.

DEFINIZIONE 4.1.1 *Sia $f(x)$ una funzione definita su $[0, 1]$. Il polinomio di Bernstein di grado n associato ad f è*

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{b_k^n x^k (1-x)^{n-k}}_{B_{n,k}(x)} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.1.1)$$

dove $b_k^n = \binom{n}{k}$.

Osserviamo che $B_n f(0) = f(0)$ e $B_n f(1) = f(1)$ ed inoltre $B_n f \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ⁴. Un'utile identità è la seguente

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1 \quad (4.1.2)$$

⁴In certi casi esso può degenerare e diventare un polinomio di grado minore di n

Infatti (4.1.2) è l'espansione binomiale di $1^n = [x + (1 - x)]^n$.

PROPOSIZIONE 4.1.1 *I polinomi di Bernstein soddisfano la ricorrenza*

$$\begin{aligned} B_{0,0} &= 1; \\ B_{0,k} &= 0 & k > 0 \\ B_{n,k}(x) &= (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x) & k = 0, \dots, n \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

DIM.:

Basta ricordare che i coefficienti binomiali soddisfano l'equazione $b_k^n = b_k^{n-1} + b_{k-1}^{n-1}$. ■

TEOREMA 4.1.1 (*Bernstein*)

Sia $f(x)$ limitata in $[0, 1]$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n f(x) = f(x) \quad (4.1.4)$$

in ogni punto $x \in [0, 1]$ dove f è continua. In particolare se $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ il limite (4.1.4) vale uniformemente in $[0, 1]$.

DIM.: Vedi ad esempio [17, 45]. ■

Il risultato si estende facilmente ad un generico intervallo $[a, b]$ tramite la solita trasformazione $\tau : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ data da $t = \tau(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Come corollario del teorema 4.1.1 e della trasformazione τ abbiamo

COROLLARIO 4.1.1 *Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Dato $\epsilon > 0$ possiamo trovare un polinomio $p(x)$ tale che $|f(x) - p(x)| \leq \epsilon$ per ogni $x \in [a, b]$.*

DIM.: Consideriamo la funzione $f_1(t) = f(a + (b-a)t)$. $f_1 \in \mathcal{C}([0, 1])$. Per il teorema 4.1.1 dato $\epsilon > 0$ esiste un polinomio $p_1(t)$ tale che $|f_1(t) - p_1(t)| \leq \epsilon$ per $t \in [0, 1]$. Ponendo $p(x) = p_1(\frac{x-a}{b-a})$ si conclude. ■

A differenza di altre tecniche di approssimazione, quali ad esempio Tchebycheff o la "best optimal approximation", l'approssimazione con polinomi Bernstein è molto regolare. Se in particolare f è differenziabile non solo $B_n f \rightarrow f$ ma pure $B_n^{(p)} f \rightarrow f^{(p)}$, $p \geq 1$. Perciò i polinomi di Bernstein forniscono l'approssimazione della funzione e delle sue derivate. Vale infatti

TEOREMA 4.1.2 Sia $f(x) \in \mathcal{C}^p([0, 1])$. Allora dato $\epsilon > 0$

$$|B_n^{(p)}f(x) - f^{(p)}(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [0, 1] \quad (4.1.5)$$

DIM.: Vedi ancora [17, 45]. ■

Un altro risultato utile a comprendere le formidabili capacità di approssimazione di questi polinomi si ha nel caso in cui la funzione da approssimare è convessa.

TEOREMA 4.1.3 Sia $f(x)$ convessa in $[0, 1]$. Allora

$$B_{n-1}f(x) \geq B_n f(x) \quad 0 < x < 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.1.6)$$

con disuguaglianza stretta valida a meno che f sia una funzione lineare, nel qual caso in ciascun intervallo $I_j = \left[\frac{j-1}{n-1}, \frac{j}{n-1}\right]$, $j = 1, \dots, n-1$ si ha $B_{n-1}f(x) = B_n f(x)$.

DIM.: Vedasi [17]. ■

Il risultato del teorema 4.1.3 vale anche se $f(x)$ è concava: basta invertire la disuguaglianza in (4.1.6).

Geometricamente parlando, l'approssimazione di Bernstein di funzioni continue è tutta compresa tra i valori assunti agli estremi dell'intervallo di definizione della funzione. Le sue derivate sono tutte *limitate* se le derivate di f lo sono. Detto altrimenti, i polinomi di Bernstein “mimano” il comportamento della funzione che approssimano.

Ma c'è un prezzo da pagare per tutto questo: *la convergenza dei polinomi di Bernstein è lenta*. Intendendo con ciò che essi convergono alla funzione approssimante con ordine $O(n^{-1})$. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 4.1.4 (*Voronovsky*)

Sia $f(x)$ limitata in $[0, 1]$. Per ogni $x_0 \in [0, 1]$ dove esiste f'' si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n f(x_0) - f(x_0)] = \frac{x_0(1-x_0)f''(x_0)}{2} \quad (4.1.7)$$

DIM.: Vedi ancora [17]. ■

Questo risultato era già noto a Bernstein il quale aveva tentato di definire una nuova approssimante che avesse migliori proprietà di convergenza. Infatti introdusse un'altra classe

di polinomi legati alla successione $B_n f$ ma di tipo diverso:

$$Q_n f(x) = \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{x(1-x)f''\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} \right] p_{n,k}(x) \quad (4.1.8)$$

Si verifica che se $f(x)$ è limitata in $[0, 1]$ ed esiste un \bar{x} in cui esiste $f^{(4)}(\bar{x})$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [Q_n f(\bar{x}) - f(\bar{x})] = \frac{\bar{x}(1-\bar{x})(1-2\bar{x})}{6} f^{(3)}(\bar{x}) - \frac{\bar{x}(1-\bar{x})^2}{8} f^{(4)}(\bar{x}) \quad (4.1.9)$$

Furono quindi introdotte da Butzer [11] delle **combinazioni lineari** di polinomi di Bernstein aventi proprietà di convergenza più marcate. Il vantaggio di tali combinazioni è che *non contengono i valori delle derivate di $f(x)$* come visto in (4.1.7) e (4.1.9).

Data l'importanza dell'approccio e la possibilità di estenderlo al caso multidimensionale, di seguito elenchiamo i passi da seguire per ottenere tali combinazioni. Dimostreremo inoltre, che tali combinazioni "accelerano" la convergenza all'ordine $O(n^{-k})$, $k = 1, 2, \dots$ e $n \rightarrow \infty$.

4.1.1 Combinazioni lineari di polinomi di Bernstein univariati

Anzitutto presentiamo i passi preliminari.

1. Consideriamo il polinomio

$$S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^r B_{n,k}(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad r = 0, 1, \dots \quad (4.1.10)$$

o equivalentemente il polinomio

$$T_{n,r}(x) = n^r S_{n,r}(x). \quad (4.1.11)$$

Un risultato dovuto a Bernstein, che già aveva indagato su tali operatori, ci garantisce che se $f(x)$ è limitata in $[0, 1]$, nei punti in cui esiste $f^{(2k)}(x)$ vale

$$B_n f(x) - f(x) = \sum_{r=1}^{2k} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} S_{n,r}(x) + \frac{\epsilon_n}{n^k} \quad (4.1.12)$$

ove $\epsilon_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

2. I polinomi $T_{n,r}(x)$ soddisfano la ricorrenza, di facile verifica

$$T_{n,r+1}(x) = x(1-x) [T'_{n,r}(x) + nrT_{n,r-1}(x)]. \quad (4.1.13)$$

Inoltre, per r fissato, $T_{n,r}(x)$ può essere scritto come un polinomio in n . Risulta

$$T_{n,r}(x) = \gamma_{r,r'}(x)n^{r'} + \gamma_{r,r'-1}(x)n^{r'-1} + \dots + \gamma_{r,1}(x)n \quad (4.1.14)$$

ove

$$r' \equiv \left[\frac{r}{2} \right] = \begin{cases} \frac{r}{2} & n \text{ pari} \\ \frac{r-1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

e $\gamma_{r,r'}(x)$ sono polinomi in x indipendenti da n .

3. Infine definiamo la seguente combinazione

$$\begin{aligned} \Omega_n^{[0]}(x) &= B_n f(x) \\ \Omega_n^{[2k]}(x) &= (2^k - 1)^{-1} \left(2^k \Omega_{2n}^{[2k-2]}(x) - \Omega_n^{[2k-2]}(x) \right) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Si verifica facilmente che i polinomi $\Omega_n^{[k]}(x)$ sono combinazioni di polinomi di Bernstein. Infatti

$$\Omega_n^{[2k]}(x) = \alpha_k B_{2^k n} f(x) + \alpha_{k-1} B_{2^{k-1} n} f(x) + \dots + \alpha_0 B_n f(x) \quad (4.1.16)$$

e i coefficienti $\alpha_i = \alpha_i(k)$ sono tali che $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$.

TEOREMA 4.1.5 (*Butzer [11]*)

Se $f(x)$ è limitata in $[0, 1]$ e $f^{(2k)}(x)$ esiste in ogni punto $x \in [0, 1]$, allora

$$|\Omega_n^{[2k-2]}(x) - f(x)| = O(n^{-k}) \quad (4.1.17)$$

e inoltre

$$|\Omega_n^{[2k]}(x) - f(x)| = o(n^{-k}) \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.1.18)$$

DIM.: A partire dai polinomi $S_{n,r}(x)$ dati in (4.1.10), come fatto in (4.1.15) definiamo i polinomi

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,r}^{[0]}(x) &= S_{n,r}(x) \\ \Gamma_{n,r}^{[2k]}(x) &= (2^k - 1)^{-1} \left(2^k \Gamma_{2n,r}^{[2k-2]}(x) - \Gamma_{n,r}^{[2k-2]}(x) \right) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Si verifica per induzione su k che

$$\Omega_n^{[2k]}(x) - f(x) = \sum_{r=1}^{2(k+s)} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \Gamma_{n,r}^{[2k]}(x) + \frac{\epsilon_n}{n^{k+s}} \quad s \geq 0 \quad (4.1.20)$$

se $f^{(2k+2s)}(x)$ esiste in x .

In particolare, per $s = 0$

$$\Omega_n^{[2k]}(x) - f(x) = \sum_{r=1}^{2k} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \Gamma_{n,r}^{[2k]}(x) + \frac{\epsilon_n}{n^k} \quad (4.1.21)$$

al solito per $n \rightarrow \infty$, $\epsilon_n \rightarrow 0$.

Affinchè (4.1.18) sia verificata, basta quindi dimostrare che

$$\sum_{r=1}^{2k} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \Gamma_{n,r}^{[2k]}(x) = O(n^{-(k+1)}). \quad (4.1.22)$$

Per provare questo fatto osserviamo che

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,r}^{[0]}(x) &= 0 & 1 \leq r \leq k+1 \\ \Gamma_{n,r}^{[2k]}(x) &= O(n^{-(k+1)}) & r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Questo deriva da (4.1.14) con opportune modifiche.

Allora, facendo uso di (4.1.20) si ha

$$\Omega_n^{[2k-2]}(x) - f(x) = \sum_{r=1}^{2k} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} \Gamma_{n,r}^{[2k-2]}(x) + \frac{\epsilon_n}{n^k} \quad s \geq 0 \quad (4.1.24)$$

che tenuto conto della seconda delle (4.1.23) si verifica (4.1.17). ■

Tutti questi risultati hanno la loro controparte multidimensionale che analizzeremo in dettaglio nella sezione successiva.

4.1.2 Algoritmo di De Casteljau

I polinomi di Bernstein hanno trovato applicazione nella *geometria computazionale* e in particolare modo nella descrizione di curve e superfici di Bézier, che sono funzioni polinomiali ottenute tramite ripetute interpolazioni (lineari) baricentriche.

Consideriamo in questa sezione un algoritmo per la costruzione di curve di Bézier.

L'algoritmo comunemente usato per eseguire queste interpolazioni è l'**Algoritmo di De Casteljau** (descritto ad esempio in [30, 31]).

Algoritmo 4.1 Dato un insieme $\mathcal{B} = \{b_0, \dots, b_n\}$ di punti del piano e $t \in \mathbb{R}$ (usualmente $t \in [0, 1]$), il generico punto appartenente alla curva di Bézier si determina con i seguenti passi:

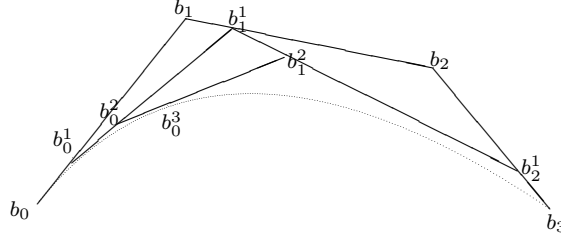


Fig. 4.1: Costruzione di una curva di Bézier con l'algoritmo di De Casteljau.

1. {Passo di inizializzazione}

$$b_i^{(0)}(t) = b_i \quad (4.1.25)$$

2. {Passo iterativo}

$$b_i^{(r)}(t) = (1-t)b_i^{(r-1)}(t) + tb_{i+1}^{(r-1)}(t) \quad r=1, \dots, n \quad i=0, \dots, n-r \quad (4.1.26)$$

La curva di Bézier calcolata con l'algoritmo 4.1 è quindi ottenuta con combinazioni baricentriche ripetute. In figura 4.1 è descritto il funzionamento dell'algoritmo di De Casteljau.

PROPOSIZIONE 4.1.2 *I punti $b_i^{(r)}(t)$ possono essere espressi in termini di polinomi di Bernstein $B_{j,r}$ di grado r risultando*

$$b_i^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_{j,r}(t) \quad i = 0, \dots, n-r \quad (4.1.27)$$

DIM.: Induzione su r .

$$\begin{aligned} & b_i^{(r)}(t) \stackrel{(4.1.26)}{=} (1-t)b_i^{(r-1)}(t) + tb_{i+1}^{(r-1)}(t) \\ \stackrel{(4.1.3)}{=} & (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} b_j B_{j-1, r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i-1, r-1}(t) \end{aligned}$$

Usiamo il fatto che $B_{j,r}(t) = 0$ se $j \notin \{0, \dots, n\}$. Riordinando gli indici otteniamo

$$\begin{aligned} & (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-1, r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i-1, r-1}(t) = \\ & \sum_{j=i}^{i+r} b_j \left[\underbrace{(1-t)B_{j-i, r-1}(t) + tB_{j-i-1, r-1}(t)}_{B_{j-i, r}(t)} \right] = \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i, r}(t) \end{aligned}$$

c.v.d. ■

Usando l'algoritmo di De Casteljaeu e la geometria ad esso sottostante possiamo dedurre delle proprietà possedute dalle curve di Bézier. Di queste ricordiamo l'invarianza per affinità, l'interpolazione nei punti estremi dell'intervallo di approssimazione, la proprietà di convex hull⁵, la simmetria e come per i polinomi di Bernstein la caratteristica capacità mimica della curva.

4.2 Polinomi di Bernstein multivariati

Generalizzando il teorema di Weierstrass a funzioni di n variabili reali si può dimostrare che se $f \in \mathcal{C}(Q^n)$, con $Q^n = [0, 1]^n$, essa può essere uniformemente approssimata con polinomi n -variati: i polinomi di Bernstein generalizzati o multivariati.

Il seguente teorema generalizza il teorema 4.1.1

TEOREMA 4.2.1 *Se $f(x) \in \mathcal{C}(Q^n)$, allora*

$$Bf(x) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} \binom{m_1}{k_1} \cdots \binom{m_n}{k_n} \cdot x_1^{k_1} (1-x_1)^{m_1-k_1} \cdots x_n^{k_n} (1-x_n)^{m_n-k_n} f\left(\frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_n}{m_n}\right) \quad (4.2.1)$$

converge uniformemente ad f su Q^n se $\min_{1 \leq j \leq n} m_j \rightarrow \infty$.

Usando la notazione a multiindice e le coordinate baricentriche, i polinomi $(n+1)$ -variati di Bernstein si denotano

$$B_{\mathbf{l}}^m(\mathbf{a}) = \binom{m}{\mathbf{l}} a_1^{l_1} \cdots a_{n+1}^{l_{n+1}} \quad |\mathbf{l}| = m \quad (4.2.2)$$

con $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{n+1})$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ e $\binom{m}{\mathbf{l}} = \frac{n!}{l_1! \cdots l_{n+1}!}$.

La notazione (4.2.2) è quella di cui faremo uso per indicare i polinomi di Bernstein multivariati su un simplex nel quale si è introdotto un sistema di coordinate baricentriche.

Anche per i polinomi multivariati di Bernstein vale una relazione di ricorrenza come in (4.1.3).

⁵Si definisce *convex hull* l'insieme formato dalle combinazioni convesse di un insieme di punti (di uno spazio euclideo) detto il *poligono di controllo*.

PROPOSIZIONE 4.2.1

$$B_{\mathbf{1}}^r(\mathbf{a}) = a_1 B_{\mathbf{1}-\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{a}) + \dots + a_{n+1} B_{\mathbf{1}-\mathbf{e}_{n+1}}^{r-1}(\mathbf{a}) \quad (4.2.3)$$

dove $|\mathbf{1}| = r$ ed \mathbf{e}_i è l' i -esimo versore della base canonica.

DIM.: La dimostrazione si fa per induzione su r . ■

Come fatto nel caso unidimensionale cerchiamo di verificare se anche per $n > 1$ si possono estendere alcuni o tutti i risultati del paragrafo precedente. Abbiamo già visto che il Teorema 4.2.1 estende il Teorema 4.1.1. Una condizione di convessità di Bernstein-Bézier patches è stata provata in [13] e successivamente migliorata in [14].

Cerchiamo ora di estendere i Teoremi 4.1.4 e 4.1.5 al caso multidimensionale. Di questi risultati ci serviremo nel prossimo capitolo per dimostrare alcune proprietà degli operatori di Bernstein su simplices.

Negli ultimi anni (vedi ad esempio [66]) sono state introdotte delle combinazioni di operatori di Bernstein su simplices n dimensionali, dimostrando che esse convergono alla funzione approssimante più velocemente che non l'originale approssimazione di Bernstein. Il miglioramento dell'ordine di convergenza è equivalente a quello ottenuto nel caso unidimensionale.

4.2.1 I polinomi $\mathcal{T}_{m,\mu}$

Questa classe di polinomi multivariati generalizza i polinomi $T_{n,r}(x)$ della sezione precedente.

Introduciamo dapprima una classe di polinomi leggermente diversa che denoteremo con $\mathcal{T}_{m,\omega}^*$ per la quale vale il seguente lemma.

LEMMA 4.2.1 Dato un lattice $\mathcal{L}_{m,n}(E_n)$ di vertici $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1}$, consideriamo i polinomi

$$\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) = \sum_{|\alpha|=m} (\alpha - m\xi)^\omega B_\alpha^m(x) \quad (4.2.4)$$

dove $\alpha, \omega \in \mathbb{N}^{n+1}$, $x = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \lambda^i$.

Valgono le seguenti relazioni:

1. $\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) = 1$ se $|\omega| = 0$
2. $\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) = 0$ se $|\omega| = 1$

DIM.: Caso 1. $\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) = \sum_{|\alpha|=m} B_\alpha^m(x) = 1$.

Caso 2. Prendiamo un particolare ω : diciamo $\omega_k = (0, \dots, \underbrace{1}_k, \dots, 0)$ ($1 \leq k \leq n+1$). Da

(4.2.4) otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{m,\omega_k}^*(x) &= \sum_{|\alpha|=m} (\alpha - m\xi)^{\omega_k} B_\alpha^m(x) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \alpha_k B_\alpha^m(x) - m\xi_k \sum_{|\alpha|=m} B_\alpha^m(x) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \alpha_k B_\alpha^m(x) - m\xi_k \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=m} \alpha_k \frac{m! \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_k^{\alpha_k} \cdots \xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}{\alpha_1! \cdots \alpha_k! \cdots \alpha_{n+1}!} \\ &= m\xi_k \sum_{|\beta|=m-1} \frac{(m-1)! \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_{n+1}^{\beta_{n+1}}}{\beta_1! \cdots \beta_{n+1}!} \\ &= m\xi_k \underbrace{\sum_{|\beta|=m-1} B_\beta^{m-1}(x)}_1 = m\xi_k \end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{T}_{m,\omega_k}^*(x) = m\xi_k - m\xi_k = 0$, $1 \leq k \leq n+1$. Questo prova il lemma. ■

Sia $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{m} \lambda^i$ un punto appartenente al simplex. Definiamo i polinomi $\mathcal{T}_{m,\mu}(x)$ come

$$\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = \sum_{|\alpha|=m} (x_\alpha - x)^\mu B_\alpha^m(x) \quad (4.2.5)$$

Consideriamo

$$x_\alpha - x = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\alpha_i}{m} - \xi_i \right) \lambda^i$$

quindi per un dato multiindice $\mu \in \mathbb{N}^n$ abbiamo

$$(x_\alpha - x)^\mu = \sum_{|\omega|=|\mu|} \beta_{\mu,\omega} \left(\frac{\alpha}{m} - \xi \right)^\omega \quad (4.2.6)$$

dove $\omega \in \mathbb{N}^{n+1}$ e $\beta_{\mu,\omega}$ sono numeri che dipendono da ω e μ . Si noti che la somma in (4.2.6) è fatta rispetto a ω .

Diamo una espressione generale dei coefficienti $\beta_{\mu,\omega}$ in (4.2.6). Dobbiamo distinguere tre casi.

1. Dato $\mu = (0, \dots, \underbrace{|\mu|}_i, \dots, 0)$, allora

$$\beta_{\mu, \omega} = \binom{|\mu|}{\omega} (\lambda_{\kappa(\mu)}^1)^{\omega_1} \dots (\lambda_{\kappa(\mu)}^{n+1})^{\omega_{n+1}} \quad (4.2.7)$$

dove $\kappa : \mathbb{N}^n \rightarrow \{1, \dots, n\}$ è una funzione suriettiva tale che $\kappa(\mu) = i$, $1 \leq i \leq n$.

2. Assumiamo che μ ha $1 < q \leq n$ componenti consecutive non nulle, diciamo $\mu_i, \dots, \mu_{i+q-1}$ con $1 \leq i \leq n - q + 1$. Per tutti i vertici consideriamo le corrispondenti componenti, cioè $\lambda_i^j, \dots, \lambda_{i+q-1}^j$. Ancora, dobbiamo distinguere due sottocasi dipendenti da ω .

- 2.1 Se $\omega = (0, \dots, 0, \underbrace{|\mu|}_s, \dots, 0)$ allora

$$\beta_{\mu, \omega} = \lambda_i^s \lambda_{i+1}^s \dots \lambda_{i+q-1}^s. \quad (4.2.8)$$

- 2.2 Altrimenti, se ω ha r componenti diverse da zero, diciamo $\omega_j, \dots, \omega_{j+r-1}$, allora

$$\beta_{\mu, \omega} = \sum_{\omega_s \neq 0} \lambda_i^j \dots \lambda_{i+q-1}^{j+r-1}. \quad (4.2.9)$$

3. Infine, assumiamo che μ ha $1 < q \leq n$ componenti non nulle. Indichiamo con I_q l'insieme degli indici in cui μ è diverso da zero. Ancora una volta dobbiamo distinguere due sottocasi dipendenti da ω .

- 2.1 Se $\omega = (0, \dots, 0, \underbrace{|\mu|}_s, \dots, 0)$ allora

$$\beta_{\mu, \omega} = \prod_{j \in I_q} (\lambda_j^i)^{\mu_j} \quad (4.2.10)$$

- 2.2 Altrimenti, se ω ha r componenti diverse da zero e sia J_r l'insieme di questi indici. Le espressioni che si ottengono hanno alcuni caratteri in comune: a) hanno r termini;

b) se $\omega_i = 1$, $i \in J_r$ allora sono preceduti da un coefficiente $c(\mu)$ che dipende dalla componente massima del multiindice μ ;

c) se $\omega_i = 1$, $\forall i \in J_r$ oltre alla proprietà b) i vertici del simplex che si considerano sono ottenuti con permutazioni pari degli indici in J_r ;

d) se $\omega_i > 1$ allora $c(\mu) = 1$.

Se siamo nell'ipotesi b) in cui, ad esempio, una componente di ω è maggiore di 1, i coefficienti sono somma dei seguenti due pezzi

$$\beta_{\mu, \omega} = c(\mu) \prod_{j \in I_q, i \in J_r} (\lambda_j^i)^{\omega_i} \quad (4.2.11)$$

$$\beta_{\mu, \omega} = \prod_{j \in I_q} (\lambda_j^i)^{\omega_i} \quad (4.2.12)$$

Se invece siamo nell'ipotesi c) allora essi sono del tipo

$$\beta_{\mu,\omega} = c(\mu) \left(\sum_{k \in S_p(J_r)} \prod_{j \in I_q} \lambda_j^k \right) \quad (4.2.13)$$

Abbiamo così verificato che i coefficienti $\beta_{\mu,\omega}$ dipendono solo dai multiindici μ and ω . Le loro espressioni sono combinazioni dipendenti da μ , ω e dalle componenti corrispondenti dei vertici $\{\lambda_i\}$ del simplex.

I polinomi $\mathcal{T}_{m,\omega}(x)$ sono legati ai polinomi $\mathcal{T}_{m,\omega}^*(x)$ dalla seguente relazione:

$$\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = \sum_{|\alpha|=m} (x_\alpha - x)^\mu B_\alpha^m(x) = m^{-|\mu|} \sum_{|\omega|=|\mu|} \beta_{\mu,\omega} \mathcal{T}_{m,\omega}^*(x) \quad (4.2.14)$$

La seguente proposizione diventa quindi facile da provare.

PROPOSIZIONE 4.2.2 *Per il polinomio $\mathcal{T}_{m,\mu}$ valgono*

1. $\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = 1$ se $|\mu| = 0$
2. $\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = 0$ se $|\mu| = 1$

DIM.:

1. Ovvvia.
2. $\mathcal{T}_{m,|\mu|=1}(x) = \frac{1}{m} \sum_{|\omega|=1} \beta_{\mu,\omega} \underbrace{\mathcal{T}_{m,|\omega|=1}^*(x)}_0 = 0. \blacksquare$

4.2.2 Combinazioni di polinomi di Bernstein multivariati

Prima di introdurre la combinazione di polinomi di Bernstein abbiamo bisogno di un altro strumento.

Sia $f(x)$ una funzione definita nel lattice $\mathcal{L}_{m,n}(E_n)$, di vertici λ^i . Possiamo scrivere

$$f(x) = f \left(\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \lambda^i \right) = f \left(\lambda^1 + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i (\lambda^i - \lambda^1) \right) = F(\xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \quad (4.2.15)$$

ove si è sfruttato il fatto che $\xi_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i$.

Consideriamo la derivata di f nella direzione non nulla $\lambda^i - \lambda^1$

$$\begin{aligned} D_{i,1}f(x) \equiv D_{\lambda^i - \lambda^1}f(x) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x + s(\lambda^i - \lambda^1)) - f(x)}{s} \\ &\stackrel{(4.2.15)}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(\xi_1, \dots, \xi_{i+s}, \dots, \xi_{n+1}) - F(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+1})}{s} \\ &= \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \quad i = 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Usiamo questo risultato e lo applichiamo a $\mathcal{T}_{m,\mu}^*$. Si vede che per $j = 2, \dots, n+1$ vale

$$\xi_1 \xi_j D_{i,1} \mathcal{T}_{m,\mu}^* = -m\mu_j \xi_1 \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu-e_j}^* + m\mu_1 \xi_1 \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu-e_1}^* + \xi_1 \mathcal{T}_{m,\mu+e_j}^* - \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu+e_1}^* \quad (4.2.17)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \xi_1 \mathcal{T}_{m,\mu+e_j}^* - \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu+e_1}^* &= \\ &= \xi_1 \xi_j D_{i,1} \mathcal{T}_{m,\mu}^* + m\mu_j \xi_1 \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu-e_j}^* - m\mu_1 \xi_1 \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu-e_1}^* \quad j=2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Introduciamo l'operatore differenziale

$$\Delta_1(D) = \xi_2 D_{2,1} + \dots + \xi_{n+1} D_{n+1,1} \quad (4.2.19)$$

e il polinomio

$$\mathcal{T}_{m,\mu}^{**} = \mu_1 \xi_1 \mathcal{T}_{m,\mu-e_1}^* + \mu_2 \xi_2 \mathcal{T}_{m,\mu-e_2}^* + \dots + \mu_{n+1} \xi_{n+1} \mathcal{T}_{m,\mu-e_{n+1}}^* \quad (4.2.20)$$

Osservando che $\sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - m\xi_i) = 0$, da (4.2.19) e (4.2.20) deduciamo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}_{m,\mu+e_i}^* = 0 \quad (4.2.21)$$

Quindi, da (4.2.18) e (4.2.21) otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{m,\mu+e_1}^* &= -\xi_1 \Delta_1(D) \mathcal{T}_{m,\mu}^* - m\xi_1 \mathcal{T}_{m,\mu}^{**} + m\mu_1 \xi_1 \mathcal{T}_{\mu-e_1}^* \\ \mathcal{T}_{m,\mu+e_j}^* &= -\xi_j \Delta_1(D) \mathcal{T}_{m,\mu}^* - m\xi_j \mathcal{T}_{m,\mu}^{**} \\ &\quad + m\mu_j \xi_j \mathcal{T}_{\mu-e_j}^* + \xi_j D_{j,1} \mathcal{T}_{m,\mu}^* \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Vale quindi il seguente lemma che stabilisce la relazione di ricorrenza tra i polinomi $\mathcal{T}_{m,\mu}^{**}$ e $\mathcal{T}_{m,\mu}^*$.

LEMMA 4.2.2

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{m,\mu+e_j}^* &= -\xi_j \Delta_1(D) \mathcal{T}_{m,\mu}^* - m \xi_j \mathcal{T}_{m,\mu}^{**} \\ &\quad + m \mu_j \mathcal{T}_{m,\mu-e_j}^* + \xi_j D_{j,1} \mathcal{T}_{m,\mu}^* \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Esempio 4.2.1 Caso $n = 1$. Il simplex ha vertici $\lambda^0 = 0$ e $\lambda^1 = 1$. Per $x \in [0, 1]$ le coordinate baricentriche di s sono $\xi_1 = x$ e $\xi_2 = 1 - x$. Prendiamo $\mu = (0, p)$, $\alpha = (m - k, k)$ e $\Delta_1(D) = (1 - x) \frac{d}{dx}$. Scrivendo $\mathcal{T}_{m,p}^* = \mathcal{T}_{m,\mu}^*$ abbiamo

$$\mathcal{T}_{m,p}^* = \sum_{k=0}^m (k - mx)^p B_{m,k}(x)$$

e

$$\mathcal{T}_{m,p}^{**} = p(1 - x) \mathcal{T}_{m,p-1}^*.$$

Si noti che $\mathcal{T}_{m,p}^*$ sono i polinomi $S_{m,p}(x)$ introdotti nella precedente sezione. Usando il lemma 4.2.2 otteniamo

$$\mathcal{T}_{m,p+1}^* = -(1 - x)^2 \left[\frac{d}{dx} \mathcal{T}_{m,p}^* + mp \mathcal{T}_{m,p-1}^* \right].$$

◇◇◇

Un'ultima osservazione

PROPOSIZIONE 4.2.3 *Se $f(x) \in \mathcal{C}^{2k}(\mathcal{L}_{m,n}(E_n))$ allora*

$$B_m f(x) - f(x) = \sum_{j=1}^2 k \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{T}_{m,\mu}}{\mu!} D^\mu f(x) + \frac{\epsilon_m}{m^k} \quad (4.2.24)$$

dove $\epsilon_m \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$.

DIM.: Vedi [66]. ■

Nota: questo risultato è l'analogo di (4.1.12).

Abbiamo ora gli strumenti per enunciare il teorema che “accelera” la convergenza per polinomi multivariati di Bernstein.

TEOREMA 4.2.2 *Poniamo*

$$L_m^{[0]} = B_m f \quad (4.2.25)$$

$$L_m^{[k]} = (2^k - 1)^{-1} \left(2^k L_{2m}^{[k-1]} - L_m^{[k-1]} \right) \quad k = 1, 2, \dots$$

Supponiamo che $f \in \mathcal{C}^{2(k+1)}(\mathcal{L}_{m,n}(E_n))$. Allora

1. $L_m^{[k]} f(x) - f(x) = \frac{1}{m^{k+1}} \Delta_{2(k+1)}(D) f(x) + o\left(\frac{1}{m^{k+1}}\right)$;
2. $L_m^{[k+1]} f(x) - f(x) = o\left(\frac{1}{m^{k+1}}\right)$;
3. $L_m^{[k]} p = p$ per $p \in \mathbb{P}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$.

DIM.: La dimostrazione è una generalizzazione di quanto fatto nel teorema 4.1.5. Dapprima definiamo i polinomi

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{m,\mu}^{[0]} &= \mathcal{T}_{m,\mu} \\ \mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]} &= (2^k - 1)^{-1} \left(2^k \mathcal{R}_{2m,\mu}^{[k-1]} - \mathcal{R}_{m,\mu}^{[k-1]} \right) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Sia ora $f \in \mathcal{C}^{2(k+q)}(\mathcal{L}_{m,n}(E_n))$. Proviamo per induzione su k che

$$L_m^{[k]} f - f = \sum_{j=1}^{2(k+q)} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]}}{\mu!} D^\mu f(x) + \frac{\epsilon_m}{m^{k+q}}. \quad (4.2.27)$$

Per $k = 0$ si verifica facendo uso di (4.2.24).

Proviamo per $k \geq 1$.

Consideriamo $f \in \mathcal{C}^{2(k+1+q)}(\mathcal{L}_{m,n}(E_n))$. Quindi

$$L_m^{[k]} f - f = \sum_{j=1}^{2(k+1+q)} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]}}{\mu!} D^\mu f(x) + \frac{\epsilon_m}{m^{k+1+q}}.$$

Usando le definizioni di $L_m^{[k+1]}$ e $\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k+1]}$ abbiamo

$$\begin{aligned} L_m^{[k+1]} f - f &= (2^{k+1} - 1)^{-1} \left(2^{k+1} L_{2m}^{[k]} f - L_m^{[k]} f \right) - f = \\ &= (2^{k+1} - 1)^{-1} \left[2^{k+1} \left(L_{2m}^{[k]} f - f \right) - \left(L_m^{[k]} f - f \right) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{2(k+1+q)} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k+1]}}{\mu!} D^\mu f(x) + \frac{\epsilon_m}{m^{k+1+q}} \end{aligned}$$

che prova (4.2.27).

Inoltre si verifica che $\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]}$ è un polinomio in m della forma

$$\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]} = m^{-(k+1)} \mathcal{F}_{\mu,k+1}(x) + \dots + m^{-(|\mu|-1)} \mathcal{F}_{\mu,|\mu|-1}(x) \quad (4.2.28)$$

ove $\mathcal{F}_{\mu,l}(x)$ sono indipendenti da m . In particolare se $k+1 > |\mu| - 1$ allora

$$\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]} = 0. \quad (4.2.29)$$

Posto quindi

$$\Delta_{2(k+1)}(D) = \sum_{j=k+2}^{2(k+1)} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{F}_{\mu,k+1}(x)}{\mu!} D^\mu. \quad (4.2.30)$$

Usando (4.2.27), (4.2.28) e (4.2.29) si prova la 1.

Da (4.2.27) e (4.2.28) deduciamo 2.

Infine usando (4.2.24) sappiamo che

$$L_m^{[0]}p - p = B_m p - p = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{T}_{m,\mu}}{\mu!} D^\mu p = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{|\mu|=j} \frac{\mathcal{R}_{m,\mu}^{[k]}}{\mu!} D^\mu p$$

Usando (4.2.29) si verifica 3. ■

Capitolo 5

Funzionali di Riferimento e Spazi Caratteristici

5.1 Idee generali

Nei capitoli precedenti abbiamo presentato sostanzialmente due metodi di descrizione di funzioni di forma: lo schema di Neville-Aitken, di tipo interpolante, che costruisce funzioni di forma esprimibili con combinazioni di polinomi elementari di Lagrange e lo schema di De Casteljaeu, di tipo approssimante, che consente di determinare polinomi che si esprimono come combinazioni di polinomi di Bernstein. Quest'ultimo schema, soprattutto usato in geometria computazionale, si è rivelato uno strumento utile nella costruzione di funzioni di forma definite su simplices.

Entrambi gli schemi possono essere visti come trasformazioni del tipo

$$F_j^p(x) = \sum_{i=j}^{j+p} c_{i,j}^p(x) F_i. \quad (5.1.1)$$

dove i numeri F_i sono valori fissati (ad esempio, al passo iniziale essi coincidono con i valori della funzione nei nodi) mentre i coefficienti $c_{i,j}^p(x)$ sono polinomi in x . *Al variare di j* si ottiene una sequenza di trasformazioni.

Una approccio generale a queste sequenze di trasformazioni si trova in [10] dove è anche provato che trasformazioni del tipo (5.1.1) sono completamente caratterizzate da un funzionale lineare detto *Funzionale di Riferimento* (nel seguito FR). Inoltre questo funzionale è associato con uno spazio vettoriale detto *Spazio Caratteristico* (nel seguito SC).

Il funzionale FR generalizza (5.1.1) al caso in cui i numeri F_i sono i valori assunti da delle funzioni γ appartenenti all'insieme

$$\Gamma = \{\gamma | \gamma : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\} \quad (5.1.2)$$

Queste funzioni devono inoltre verificare alcune condizioni che elencheremo nel successivo paragrafo. Lo spazio da esse generato, indichiamolo con Γ^p , è un sottospazio vettoriale di Γ .

In questo capitolo proveremo l'esistenza di uno SC per il funzionale FR associato agli schemi di Neville-Aitken e De Casteljaeu fornendo anche delle espressioni esplicite delle funzioni appartenenti a detti SC.

DEFINIZIONE 5.1.1 *Sia data una sequenza di $\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ di elementi di uno spazio vettoriale. Definiamo ricorsivamente le sequenze $\{F_j^p\}_{j \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}_0}$ come segue*

$$\begin{aligned} F_j^0 &= F_j \quad j \in \mathbb{Z} \\ F_j^p &= \lambda_{1,j}^p F_j^{p-1} + \lambda_{2,j}^p F_{j+1}^{p-1} \quad j \in \mathbb{Z}, \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

ove i coefficienti $\lambda_{1,j}^p$ e $\lambda_{2,j}^p$ sono numeri reali o complessi che possono eventualmente dipendere, anche non linearmente, da qualche termine della sequenza $\{F_j\}$.

La (5.1.3) è detta uno **schema ricorrente di tipo triangolare**.

Come si nota immediatamente gli schemi unidimensionali di Neville-Aitken (3.2.1) e De Casteljaeu (4.1.25) e (4.1.26) introdotti nel capitolo precedente, possono essere descritti come schemi di tipo triangolare.

Uno schema triangolare può sempre essere interpretato come una sequenza di trasformazioni del tipo (5.1.1). Infatti, vale il seguente lemma.

LEMMA 5.1.1 *Per qualche j e p sia F_j^p il risultato di uno schema triangolare del tipo (5.1.3). Allora esistono dei numeri $\eta_{i,j}^p$ tali che F_j^p può essere scritta nella forma (5.1.1). I coefficienti $\eta_{i,j}^p$ sono legati ai coefficienti $\lambda_{1,j}^p$ e $\lambda_{2,j}^p$ dalle seguenti relazioni*

$$\begin{cases} \eta_{j,j}^p = \lambda_{1,j}^p \eta_{j,j}^{p-1} \\ \eta_{i,j}^p = \lambda_{1,j}^p \eta_{i,j}^{p-1} + \lambda_{2,j}^p \eta_{i,j+1}^{p-1} & i = j+1, \dots, j+p-1 \\ \eta_{j+p,j}^p = \lambda_{2,j}^p \eta_{j+p,j+1}^{p-1} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

con condizioni al "contorno" $\eta_{j,j}^0 = 1$.

Se per tutti i valori di p e j la somma $\lambda_{1,j}^p + \lambda_{2,j}^p$ non dipende da j , diciamo $\lambda_{1,j}^p + \lambda_{2,j}^p = \lambda_p$, allora i coefficienti $\eta_{i,j}^p$ soddisfano la relazione

$$\eta_p = \sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p = \begin{cases} \prod_{k=1}^p \lambda_k & p \geq 1 \\ 1 & p = 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Se la sequenza $\alpha_j^0 = \alpha$, $\forall j$, allora $\alpha_j^p = \alpha \eta_p$, $\forall p \geq 1$.

Viceversa, se per tutti i valori di p e j la somma $\sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p$ non dipende da j , cioè $\sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p = \eta_p$, allora il valore $\lambda_{1,j}^p + \lambda_{2,j}^p = \lambda_p$ è anche indipendente da j e si ha

$$\eta_p = \begin{cases} \prod_{k=1}^p \lambda_k & p \geq 1 \\ 1 & p = 0 \end{cases} \quad (5.1.6)$$

DIM.: Vedi [10]. ■

Nel caso particolare dello schema di N-A unidimensionale (3.2.1), si verifica che i coefficienti $\eta_{i,j}^p$ sono i polinomi elementari di Lagrange di grado p . Posto $\eta_p = \sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p$ vale la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 5.1.1

$$\eta_p = 1 \quad \forall p \geq 0 \quad (5.1.7)$$

DIM.: Induzione su p .

Per $k = 0$ abbiamo $\eta_0 = \eta_{j,j}^0 = 1$.

Passo induttivo ($p \geq 1$).

Sia vera per $p - 1$ proviamola per p . Ora è $\eta_p = \sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p$. Dal Lemma precedente si deduce che η_p può essere pensato come la somma della trasformazione costantemente identica. Cioè

facendo uso di (5.1.1) si ha che $\eta_p = \sum_{i=j}^{j+p} \eta_{i,j}^p \cdot 1$.

Usando la seconda delle (5.1.3) abbiamo

$$\eta_p = \lambda_{1,j}^p \left(\sum_{j=i}^{i+p-1} \eta_{i,j}^{p-1} \right) + \lambda_{2,j}^p \left(\sum_{j=i+1}^{i+p} \eta_{i,j+1}^{p-1} \right) \stackrel{ip.ind.}{=} (\lambda_{1,j}^p + \lambda_{2,j}^p) \eta_{p-1} = 1.$$

Una dimostrazione alternativa si ha ricordando che la somma dei polinomi elementari di Lagrange di grado p è 1 per ogni p . ■

Un risultato analogo è possibile con lo schema di De Casteljaou. In entrambi i casi le relazioni (5.1.5) oppure (5.1.6) si riducono al più semplice caso $\eta_p = 1$, $\forall p \geq 0$.

DEFINIZIONE 5.1.2 Sia Γ lo spazio delle funzioni γ che sono definite su un certo sottoinsieme $\mathcal{W} = \{w_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ di \mathbb{R} . Il funzionale lineare

$$\mathcal{F}_i^p = \sum_{j=i}^{i+p} \eta_{j,i}^p \gamma(w_j) \quad (5.1.8)$$

è ben definito. Esso verrà chiamato il **Funzionale di Riferimento** associato allo schema triangolare (5.1.3) (o equivalentemente alla trasformazione (5.1.1)).

Osservazione

Se in particolare in (5.1.3) i valori F_j sono presi cosicchè essi coincidono con i valori della generica funzione γ in w_j , cioè $F_j = \gamma(w_j)$, si ha

$$\mathcal{F}_i^p = F_i^p \quad (5.1.9)$$

Nel caso particolare dello schema di N-A, le relazioni (5.1.3) e (5.1.9) ci dicono che il FR coincide con il polinomio interpolante di Lagrange dove per $\gamma(w_j)$ si prenderà il valore della funzione nel punto j -esimo da interpolare.

LEMMA 5.1.2 Supponiamo che per qualche i e p , \mathcal{F}_i^p sia il FR di una certa trasformazione F_i^p . Inoltre assumiamo che esista un sottospazio di dimensione $p+1$ di Γ , diciamo

$$\Gamma^p = \text{span}\{\gamma_0, \dots, \gamma_p\} \quad (5.1.10)$$

tale che sia non nullo il determinante di Haar, ovvero

$$H_{\Gamma^p}(w_i, \dots, w_{i+p}) = \begin{vmatrix} \gamma_0(w_i) & \dots & \gamma_0(w_{i+p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_p(w_i) & \dots & \gamma_p(w_{i+p}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.1.11)$$

e

$$\mathcal{F}_i^p(\gamma_l) = \begin{cases} \alpha_i^p & l = 0 \\ 0 & l = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (5.1.12)$$

dove α_i^p sono numeri tutti diversi da zero.

Allora ogni funzionale lineare T della forma

$$T(\gamma) = \sum_{j=i}^{i+p} a_{j,i}^p \gamma(w_j) \quad (5.1.13)$$

che soddisfa (5.1.12), coincide con \mathcal{F}_i^p .

DEFINIZIONE 5.1.3 Lo spazio Γ^p è detto lo **Spazio Caratteristico** associato al funzionale \mathcal{F}_i^p .

Il principale vantaggio di un tale formalismo, sta nella possibilità di costruire nuove formule per rappresentare più efficientemente trasformazioni del tipo (5.1.1), che come abbiamo visto si trovano spesso nell'analisi numerica. Il risultato di maggior interesse è il seguente (vedi [10]).

TEOREMA 5.1.1 *Data una trasformazione F_i^p e il corrispondente FR, $\mathcal{F}_i^p(\gamma)$. Allora, sotto le ipotesi del Lemma 5.1.2, si può scrivere*

$$\mathcal{F}_i^p(\gamma) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma(w_i) & \dots & \gamma(w_{i+p}) \\ \gamma_1(w_i) & \dots & \gamma_1(w_{i+p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_p(w_i) & \dots & \gamma_p(w_{i+p}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_0(w_i) & \dots & \gamma_0(w_{i+p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_p(w_i) & \dots & \gamma_p(w_{i+p}) \end{vmatrix}} \alpha_i^p \quad (5.1.14)$$

DIM.: Infatti il rapporto in (5.1.14) è un funzionale lineare del tipo (5.1.13) che verifica (5.1.12). ■

Osservazione

Nel caso di interpolazione in uno spazio di dimensione finita di cui si conosca una base (vedi ad esempio [17]) il polinomio d'interpolazione di Lagrange è esprimibile come rapporto di determinanti. Una tale caratterizzazione l'abbiamo trovata nel Capitolo 2 a proposito dello schema di N-A generalizzato. Quindi, il Teorema 5.1.1 altro non è che l'estensione di detto risultato allo spazio lineare SC associato al funzionale FR.

5.2 Funzionale FR e Spazio SC per lo schema di Neville-Aitken

DEFINIZIONE 5.2.1 *Dati*

1. *il polinomio $P_i^r(x)$ ottenuto con lo schema di Neville-Aitken (3.2.1) o equivalentemente (3.2.3) all' r -esimo passo;*
2. *l'insieme $\mathcal{W} = \{w_0, w_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$;*
3. *l'insieme di funzioni $\Gamma = \{\gamma \mid \gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}\}$;*

definiamo per x fissato il funzionale

$$\mathcal{P}_i^r(\gamma) = \sum_{j=i}^{i+r} \eta_{j,i}^r(x) \gamma(w_j) \quad (5.2.1)$$

Come visto nella precedente sezione, lo chiameremo il Funzionale di Riferimento associato al polinomio $P_i^r(x)$.

Definiamo ora chi è e quali condizioni dovrà verificare lo spazio caratteristico associato a detto funzionale.

DEFINIZIONE 5.2.2 Un sottospazio $\Gamma^r = \{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}$ di Γ tale che il determinante di Haar

$$\mathcal{H}_{\Gamma^r}(w_0, \dots, w_r) = |\gamma_j(w_i)|_{i,j=0,\dots,r} \neq 0 \quad (5.2.2)$$

e tale che

$$\mathcal{P}_i^r(\gamma_j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (5.2.3)$$

è detto lo **Spazio Caratteristico** di \mathcal{P}_i^r

Questa definizione è equivalente alla (5.1.12) ottenuta sostituendo opportunamente i coefficienti. Si noti inoltre, che si è scelto per α_i^r il valore 1. Questo deriva dal fatto che i coefficienti, che sono i polinomi elementari di Lagrange, sono indipendenti da i e hanno per somma 1.

Siamo quindi interessati al seguente problema.

Problema 4 *Esiste uno SC associato con il FR \mathcal{P}_i^r ?*

La risposta, affermativa, è contenuta nel seguente Teorema.

TEOREMA 5.2.1 *Dato il polinomio di interpolazione di Lagrange, $P_i^r(x)$, di grado r , e il suo associato funzionale di riferimento, \mathcal{P}_i^r .*

Esiste lo SC Γ^r e si ha

$$\Gamma^r = \text{span} \langle \gamma_i \rangle \quad i = 0, \dots, r$$

dove $\gamma_0(w) = 1$ and $\gamma_i(w) = x^i - w^i \quad i = 1, \dots, r$

DIM.: Dal Teorema 3.4.2 sappiamo che le funzioni $\gamma_{r,j}(x)$, $r, j = 0, \dots, m$ date in (3.4.10) soddisfano le relazioni (3.4.15) e (3.4.16) che sono equivalenti a (5.2.3).

Nel caso di interpolazione lagrangiana queste funzioni hanno l'espressione

$$\gamma_{r,j}(x) = x^r - x_j^k \quad \text{per } r > 0$$

, come verificato nell'Esempio 3.4.4. Poiché x è fissato, possiamo considerare $\gamma_{r,j}$ solo come funzione di x_j , cioè $\gamma_{r,j}(x) = \gamma_r(x_j)$. Inoltre, le $r+1$ funzioni $\gamma_0(w) = 1$ e $\gamma_i(w) = x^i - w^i$ $i = 1, \dots, r$ soddisfano la condizione di Haar e sono linearmente indipendenti. Esse generano un sottospazio di dimensione $r + 1$ di funzioni da $W = \{w_i, \dots, w_{i+r}\}$ in \mathbb{R} . ■

5.3 Funzionale FR e Spazio SC per lo schema di De Casteljaou

Si è visto che il polinomio di Bézier di grado m si esprime come combinazione di polinomi di Bernstein $B_{m,k}(x)$ di grado m . Nel capitolo precedente abbiamo inoltre visto che i polinomi di Bernstein soddisfano alla relazione di ricorrenza di tipo triangolare (4.1.3). Usando questa classica relazione in [10] è dimostrato che **non esiste** uno spazio caratteristico per il funzionale FR associato ai polinomi di Bernstein. Un'ulteriore conferma di questa asserzione ci viene dalla teoria sui sistemi di Tchebycheff. Infatti i polinomi di Bernstein **non** formano un sistema di T. completo. Quindi per provare l'esistenza di uno SC dovremmo caratterizzare in modo diverso questi polinomi.

La nostra indagine si sposta su un'altra relazione di ricorrenza per i polinomi di Bernstein, già descritta in [45], basata sulle differenze divise della funzione $f(x) = x^{a_\nu}$, con $\{a_\nu\}$ una sequenza strettamente crescente di numeri reali con $a_0 = 0$. Se $a_\nu = \nu$, $\forall \nu$ si riottengono gli usuali polinomi di Bernstein. Vale infatti il Lemma seguente.

PROPOSIZIONE 5.3.1 *I polinomi di Bernstein soddisfano la relazione di ricorrenza*

$$\begin{aligned} B_{\nu,k} &= x^\nu & \nu &\in \mathbb{Z} \\ B_{\nu,k} &= \lambda_{1,\nu}^k B_{\nu,k-1} + \lambda_{2,\nu}^k B_{\nu+1,k-1} & k &= 1, 2, \dots \quad \nu \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

dove $\lambda_{1,\nu}^k = \frac{\nu+k}{k}$ e $\lambda_{2,\nu}^k = -\frac{\nu+1}{k}$.

DIM.: Vedi [45, 10] ■

In figura 5.1 è riportata la tabella con cui vengono generati i polinomi di Bernstein mediante la ricorrenza (5.3.1). Si noti come *muovendoci per diagonali*, dall'alto al basso e da destra verso sinistra, si hanno tutti polinomi di Bernstein di fissato grado. Detto altrimenti, consideriamo l'elemento di indici ν, k , $B_{\nu,k}(x)$: esso è un polinomio di Bernstein di grado $\nu + k$. L'interesse della relazione (5.3.1) va ben oltre. Si osservi che

$$\lambda_{1,\nu}^k + \lambda_{2,\nu}^k = \frac{k-1}{k}$$

$\nu \backslash k$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\nu = 0$	$B_{0,0}=1$	$B_{0,1}=1-x$	$B_{0,2}=(1-x)^2$	$B_{0,3}=(1-x)^3$
$\nu = 1$	$B_{1,0}=x$	$B_{1,1}=2x(1-x)$	$B_{1,2}=3x(1-x)^2$	\dots
$\nu = 2$	$B_{2,0}=x^2$	$B_{2,1}=3x^2(1-x)$	\dots	\dots
$\nu = 3$	$B_{3,0}=x^3$	\dots	\dots	\dots

Fig. 5.1: Tabella di generazione dei polinomi di Bernstein mediante la ricorrenza basata sulle differenze divise della funzione x^ν .

ovvero che la somma è indipendente da ν . Allora è applicabile il risultato del Lemma 5.1.1. Sappiamo quindi che coefficienti $\eta_{i,\nu}^k$ sono legati ai coefficienti $\lambda_{1,\nu}^k$ e $\lambda_{2,\nu}^k$ dalle relazioni (5.1.4). Inoltre, posto $\lambda_k = \lambda_{1,\nu}^k + \lambda_{2,\nu}^k$ si ha

$$\eta_k = \sum_{i=\nu}^{\nu+k} \eta_{i,\nu}^k = \begin{cases} \prod_{l=1}^k \lambda_l & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

Si può quindi dimostrare, per induzione su k , che per $k \geq 0$

$$\eta_{i,\nu}^k = (-1)^{i-\nu} \binom{k}{i-\nu} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\nu+k-j}{k-j} \right) \quad i = \nu, \dots, \nu+k \quad (5.3.2)$$

In particolare $\eta_{\nu,\nu}^0 = 1$ mentre

$$\eta_k = \sum_{i=\nu}^{\nu+k} \eta_{i,\nu}^k = 0 \quad k \geq 1 \quad (5.3.3)$$

Sotto le ipotesi precedenti sui coefficienti η_i, ν^k , per l'esistenza dello spazio caratteristico in base al Lemma 5.1.2 devono esistere dei numeri α_i^k **tutti diversi da zero** tali che valga (5.1.12). Questi numeri, per il Lemma 5.1.1, sono legati ai coefficienti $\eta_{i,\nu}^k$ dalla relazione

$$\alpha_i^k = \alpha \eta_k = \alpha \left(\sum_{i=\nu}^{\nu+k} \eta_{i,\nu}^k \right) = 0 \quad k \geq 1.$$

Quindi, *non possiamo determinare lo spazio caratteristico per lo schema di De Casteljaou neppure con questa nuova formulazione per i polinomi di Bernstein.*

Osservazioni

La conoscenza dello spazio caratteristico ci permette di calcolare il funzionale di riferimento come un rapporto di determinanti. Infatti, come dimostrato nel Teorema 5.1.1, si può scrivere

$$\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}(\gamma) = \left| \begin{array}{cccc} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_d \\ s_0 & s_1 & \cdots & s_d \end{array} \right|^{-1} \left| \begin{array}{cccc} \gamma & \gamma_1 & \cdots & \gamma_d \\ s_0 & s_1 & \cdots & s_d \end{array} \right| \quad (5.3.4)$$

L'interesse di un tale formalismo sta nella possibilità di applicare schemi di accelerazione della convergenza per il calcolo di detto determinante e quindi del corrispondente funzionale di riferimento o polinomio interpolante. Per maggiori dettagli vedi [10, 8].

Capitolo 6

Risultati multidimensionali, $n > 2$

In questo capitolo vogliamo raccogliere tutti i risultati ottenuti nel caso multidimensionale relativamente a problemi di interpolazione e approssimazione su simplices. Discuteremo degli schemi di Neville-Aitken e De Casteljau multivariato, dimostrando che essi ammettono uno spazio caratteristico. Per queste dimostrazioni faremo uso di concetti e risultati introdotti nei capitoli precedenti, estendendoli opportunamente. In particolare si useranno sistemi di coordinate baricentriche.

6.1 Schema di Neville-Aitken multivariato

In coordinate baricentriche lo schema di N-A multivariato può risciversi nel seguente modo ([30]):

$$\begin{cases} p_{\mathbf{1}}^{(0)}(x) = p_{\mathbf{1}} & |\mathbf{1}| = m \\ p_{\mathbf{1}}^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{(r)} p_{\mathbf{1}+\mathbf{e}_k}^{(r-1)}(x) & r = 1, \dots, m \quad |\mathbf{1}| = m - r \end{cases} \quad (6.1.1)$$

dove $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ e

$$\beta_k^{(r)} = \frac{m\alpha_k - l_k}{r}. \quad (6.1.2)$$

Al solito, x è un vettore $(n+1)$ -dimensionale e $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^{n+1}$ è un multiindice. È facile provare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{(r)}(x) = 1$$

ed inoltre essi sono indipendenti dai nodi p_1 , $|\mathbf{l}| = m$.

Il risultante polinomio $p_{\mathbf{0}}^{(m)}$ è il polinomio interpolante sopra il lattice $\mathcal{L}_{m,n}(E_n)$. Lo schema (6.1.1) assieme alla mappa a coordinate baricentriche, può essere usato per calcolare il corrispondente polinomio in coordinate cartesiane. Vediamolo su un esempio.

Esempio 6.1.1 Consideriamo la mappa lineare $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ da coordinate cartesiane a coordinate baricentriche. In forma matriciale la riscriviamo come $\psi(x) = A\tilde{x}$, dove $A \in \mathbb{M}_{n+1}$ e $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. Denotando con p_1 il polinomio interpolante in coordinate cartesiane corrispondenti a p calcolato con lo schema di Neville-Aitken's. Con semplici calcoli possiamo riottenere l'originale polinomio p .

Ad esempio prendiamo l'insieme in \mathbb{R}^2 , $S_c = \{(0, 0), (1, 1), (2, \frac{1}{2})\}$. Il corrispondente insieme in coordinate baricentriche è $S_b = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ottenuto con la trasformazione

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

dove $2\Delta = 2 * (\text{area segnata di } S_c) = -\frac{3}{2}$. Segue che $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2, \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2)$. Il polinomio interpolante calcolato con N-A è lineare e risulta $p_{000}^{(1)}(x) = \alpha_1 p_{100} + \alpha_2 p_{010} + \alpha_3 p_{001}$. Usando il sistema (6.1.3) e dal fatto che $p_{000}^{(1)}(1, 0, 0) = p_{100}$ riotteniamo il corrispondente punto in coordinate cartesiane risolvendo il sistema (sottodeterminato)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.1.4)$$

Risulta $(x_1, x_2) = (0, 0)$, come richiesto.



Il polinomio interpolante calcolato con le relazioni (6.1.1), può risciversi nella seguente forma [51]:

$$p^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{L}_{m,n}(E_n)} L_k(\mathbf{x}) p_{\mathbf{l}} \quad |\mathbf{l}| = m \quad (6.1.5)$$

dove la somma è da intendersi estesa su tutti i punti del lattice $\mathcal{L}_{m,n}(E_n)$ e

$$L_k(x) = \frac{1}{l_1! \cdots l_{n+1}!} \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=0}^{l_i-1} (m\alpha_i - j) \quad k=1, \dots, K_{m,n} \quad (6.1.6)$$

Se $l_i - 1 < 0$, assumeremo che il fattore in (6.1.6) sia 1.

È facile provare che il numero dei polinomi $L_k(\mathbf{x})$ è esattamente uguale alla cardinalità

del lattice $\mathcal{L}_{m,n}(E_n)$, cioè $K_{m,n}$. Nel caso unidimensionale essi coincidono con i familiari polinomi elementari di Lagrange e come nel caso unidimensionale vale l'identità

$$\sum_{\mathcal{L}_{m,n}(E)} L_k(x) = 1 \quad (6.1.7)$$

6.1.1 Schema di N-A per sistemi di Tchebycheff

Lo schema di Neville-Aitken multivariato (6.1.1) fu generalizzato da Mühlbach in [49] a una famiglia $\{g_i\}_{i=1,\dots,n}$ di funzioni continue formanti un sistema di Tchebycheff sopra un insieme S di cardinalità almeno n (si vedano la Definizione 3.4.2 e l'espressione (3.4.1)). Per un sistema \mathbb{K} -ST, è possibile esprimere il polinomio interpolante mediante una relazione di ricorrenza, provata in [49], ovvero la relazione (3.4.9). I coefficienti $(\lambda_j(x))_{j=0,\dots,m}$ in quella formula, si possono esprimere come rapporto di determinanti i cui elementi

$$(\gamma_{k,l}(x))_{k=1,\dots,m; l=0,\dots,j-1,j+1,\dots,m}$$

con $j = 0, \dots, m$, sono gli *errori di interpolazione* ottenuti sostituendo la funzione da interpolare, con una delle funzioni della famiglia (si veda il Teorema 3.4.2). Inoltre questi errori possono essere calcolati come rapporto di determinanti di Vandermonde generalizzati.

Due interessanti relazioni furono dedotte:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m \lambda_j(x) = 1 \\ \sum_{j=0}^m \gamma_{k,l}(x) \lambda_j(x) = 0 \quad k=1,\dots,m \end{cases} \quad (6.1.8)$$

In [8], è stato provato che la relazione (3.4.9), detta anche *algoritmo di Mühlbach-Neville-Aitken (M-N-A)*, può essere usata per il problema generale di interpolazione fornendo un diverso modo di calcolare il polinomio interpolante. Questo fa uso della identità di Sylvester per determinanti.

Il legame fra l'algoritmo di M-N-A e quest'ultimo, proposto in [8], si ottiene mediante la seguente posizione:

$$r_{i,k} g_j(x) = -g_{k-i,j}^{(i)}(x) \quad 1 \leq i, j, k \leq m \quad 1 \leq k-i < j \leq m \quad (6.1.9)$$

dove $\{g_j\}_{j=1,\dots,m}$ è un \mathbb{K} -ST su un insieme di punti S e le funzioni $g_{k,j}^{(i)}$ sono calcolate mediante le seguenti ricorrenze:

$$g_{0,j}^{(i)}(x) = g_j(x_i) \frac{g_0(x)}{g_0(x_i)} - g_j(x) \quad (6.1.10)$$

mentre per $1 \leq k \leq m$

$$g_{k,j}^{(i)}(x) = \frac{g_{k-1,k}^{(i+1)}(x)g_{k-1,j}^{(i)}(x) - g_{k-1,k}^{(i)}(x)g_{k-1,j}^{(i+1)}(x)}{g_{k-1,k}^{(i+1)}(x) - g_{k-1,k}^{(i)}(x)} \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,m-k \quad (6.1.11)$$

I coefficienti $(\gamma_{j,i}(x))_{i,j=0,\dots,m}$ sono quindi dati

$$\gamma_{j,i}(x) = -g_{0,j}^{(i)}(x) = g_j(x) - g_j(x_i) \frac{g_0(x)}{g_0(x_i)} \quad i,j=1,\dots,m \quad (6.1.12)$$

Assumeremo che $\gamma_{0,j}(x) = 1 \quad j = 0, \dots, m$.

Esempio 6.1.2 Consideriamo l'insieme $\mathcal{B} = \{1, x, y\}$ che è un \mathbb{R} -ST di *secondo* ordine ⁵. Si prenda come insieme di punti S l'insieme

$$S = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0)\}.$$

In questi punti assumiamo che le funzioni assumano i valori $w_0 = 0, w_1 = 2, w_2 = 2$. I coefficienti $\gamma_{j,k-i}(x)$ richiesti in (6.1.8) sono:

$$\begin{cases} \gamma_{0,0} = \gamma_{0,1} = \gamma_{0,2} = 1 \\ \gamma_{1,0} = x, \quad \gamma_{1,1} = x, \quad \gamma_{1,2} = x - 2 \\ \gamma_{2,0} = y, \quad \gamma_{2,1} = y - 2, \quad \gamma_{2,2} = y \end{cases}$$

È facile verificare che le funzioni $\lambda_0(x, y)$, $\lambda_1(x, y)$ e $\lambda_2(x, y)$ richieste in (6.1.8) sono:

$$\begin{aligned} \lambda_0(x, y) &= 1 - \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \\ \lambda_1(x, y) &= \frac{y}{2} \\ \lambda_2(x, y) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Quindi è pure verificata la relazione (6.1.8).



In generale, da questa costruzione, concludiamo che dato un sistema di T. completo \mathbb{K} -ST di ordine m , per ogni $r = 0, \dots, m$, esistono $(m+1) \cdot (m-r+1)$ funzioni $\{\gamma_{i,l}\}_{i=0,\dots,m; l=0,\dots,m-r}$ e $m+1$ funzioni λ_j per cui sono soddisfatte le relazioni (6.1.8). Si noti come solo $m+1$ funzioni delle $\{\gamma_{i,l}\}_{i=0,\dots,m; l=0,\dots,m-r}$ sono linearmente indipendenti.

⁵Si dice che un sistema di Tchebycheff ha *ordine* n su un certo intervallo, se nessuna combinazione lineare a coefficienti reali ha più di n zeri distinti nell'intervallo, a meno che si consideri la combinazione nulla

6.1.2 Funzionale di Riferimento e Spazio Caratteristico

Estendiamo il risultato ottenuto al capitolo precedente per lo schema di Neville-Aitken unidimensionale a quello multivariato. Premettiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 6.1.1 *Dato un multiindice $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, sia $|\mathbf{l}| = \sum_{i=1}^{n+1} l_i = k$ la sua lunghezza. Useremo la notazione $\tau_k(\mathbf{l})$ per il numero totale di $n+1$ -ple di lunghezza $|\mathbf{l}| = k$.*

È facile provare che

$$\tau_k(\mathbf{l}) = \binom{n+k}{k} \quad (6.1.13)$$

Ad ogni passo r in (6.1.1), noi eseguiamo una combinazione lineare i cui coefficienti sono i polinomi lineari $\beta_k^{(r)}(x)$ che, come notato, dipendono solo dalla k -esima coordinata baricentrica. Ciò significa che il grado del polinomio è $\leq r$. Come nel caso unidimensionale definiamo il funzionale di riferimento.

DEFINIZIONE 6.1.2 *Dati*

1. *il polinomio $p_{\mathbf{l}}^r(x)$ ottenuto con lo schema di Neville-Aitken (6.1.1) all' r -esimo passo;*
2. *l'insieme $\mathcal{W} = \{w_0, w_1, \dots\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (questo insieme può essere visto come un insieme di coordinate baricentriche corrispondenti a un dato insieme di punti di \mathbb{R}^n);*
3. *l'insieme di funzioni $\Gamma = \{\gamma \mid \gamma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}\}$;*

definiamo per x fissato il funzionale

$$\mathcal{P}_{\mathbf{l}}^r(\gamma) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j^r(x) \gamma(w_j) \quad |\mathbf{l}| = m - r \quad (6.1.14)$$

Come visto nel capitolo precedente, lo chiameremo il Funzionale di Riferimento associato con il polinomio $p_{\mathbf{l}}^r(x)$.

Definiamo ora chi è e quali condizioni dovrà verificare lo spazio caratteristico associato a detto funzionale.

DEFINIZIONE 6.1.3 *Un sottospazio $\Gamma^r = \{\gamma_0, \dots, \gamma_r\}$ di Γ tale che il determinante di Haar*

$$\mathcal{H}_{\Gamma^r}(w_0, \dots, w_r) = |\gamma_j(w_i)|_{i,j=0,\dots,r} \neq 0 \quad (6.1.15)$$

e tale che

$$\mathcal{P}_{\mathbf{i}}^r(\gamma_j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j = 1, 2, 3, \dots, r \end{cases} \quad (6.1.16)$$

è detto lo **Spazio Caratteristico** di $\mathcal{P}_{\mathbf{i}}^r$

L'espressione (6.1.14) rappresenta un insieme di $\tau_{m-r}(\mathbf{i})$ funzionali lineari indipendenti. Quindi, per ciascuno di essi, dovremo trovare $n+1$ funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ tali che il Problema 4 abbia soluzione.

TEOREMA 6.1.1 Consideriamo un lattice $\mathcal{L}_{m,n}$ contenente $K_{m,n} = \binom{m+n}{n}$ punti. Dato il polinomio di grado r , $p_{\mathbf{i}}^r(x)$, $|\mathbf{i}| = m - r$ determinato con l'algoritmo multivariato di Neville-Aitken (6.1.1) al passo r e il suo associato FR $\mathcal{P}_{\mathbf{i}}^r$, espresso come in (6.1.14). Allora, esiste lo spazio caratteristico Γ^r . Risulta

$$\Gamma^r = \text{span} \langle \gamma_i \rangle \quad i = 0, \dots, d$$

dove $\gamma_0(w) = 1$ e $\gamma_i(w) = g_i - g_i(w) \quad i = 1, \dots, d = K_{r,n}$.

Inoltre, le funzioni $g_i(\cdot)$ rappresentano la base canonica di $\mathbb{P}_r(\mathbb{R}^n)$.

DIM.: Al passo r il membro sinistro della (6.1.1) consiste di $\tau_{m-r}(\mathbf{i})$ polinomi di grado $\leq r$. Possiamo esprimere ciascuno di essi come una combinazione delle prime $d = K_{r,n}$ funzioni della base canonica di $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}^n)$, cioè l'insieme $\mathcal{G} = \{g_0, \dots, g_d\}$.

L'insieme \mathcal{G} è un sistema di Tchebycheff su \mathbb{R} , perciò possiamo determinare delle funzioni che soddisfano alla (6.1.16) (vedi paragrafo precedente). Le funzioni richieste hanno la forma: $\gamma_{i,j}(x) = g_i(x) - g_i(x_j) \frac{g_0(x)}{g_0(x_j)}$ $i, j = 0, \dots, d$. Poiché $g_0(x) = 1$, avremo $\gamma_{i,j}(x) = g_i(x) - g_i(x_j)$ per $i > 0$. Se fissiamo x , potremo considerare $\gamma_{i,j}$ solo come funzioni di x_j , i.e. $\gamma_{i,j}(x) = \gamma_i(x_j)$.

Allora, posto $g_i(x) = g_i$, le d funzioni richieste hanno l'espressione $\gamma_i(w) = g_i - g_i(w)$. Questo insieme è linearmente indipendente, e il determinante di Haar (6.1.15) è diverso da zero sull'insieme \mathcal{W} di punti distinti di cardinalità d . ■

6.2 Schema di De Casteljaou multivariato

L'analogo multidimensionale di una curva di Bézier sono le superfici e le ipersuperfici. Come nel caso unidimensionale un punto appartenente a una (iper)superficie di Bézier può calcolarsi con l'algoritmo di De Casteljaou multidimensionale ed esprimersi come combinazione di polinomi di Bernstein.

L'algoritmo multidimensionale di De Casteljaeu generalizzato a Bézier patches in coordinate baricentriche si può così descrivere.

Algoritmo 6.1 Dato un simplex di ordine m con nodi $\{b_{\mathbf{l}}\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($|\mathbf{l}| = m$) e un punto $P \in \mathbb{R}^n$ avente coordinate baricentriche $x = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$

1. *{Passo di inizializzazione}*

$$b_{\mathbf{l}}^{(0)}(x) = b_{\mathbf{l}} \quad |\mathbf{l}| = m \quad (6.2.1)$$

2. *{Passo ricorsivo}*

Per $r = 1, \dots, m$ esegui

$$b_{\mathbf{l}}^{(r)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i b_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_i}^{(r-1)}(x) \quad |\mathbf{l}| = m - r \quad (6.2.2)$$

L'equivalenza tra questo algoritmo e il polinomio di Bézier è confermata dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 6.2.1 *Il generico punto calcolato al passo r con l'algoritmo 6.1 può essere espresso usando i polinomi di Bernstein generalizzati. Risulta*

$$b_{\mathbf{l}}^{(r)}(x) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} b_{\mathbf{l}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{(r)}(x) \quad |\mathbf{l}| = m - r \quad (6.2.3)$$

DIM.: Induzione su r .

Per $r = 0$ segue dalla (6.2.2).

Sia ora $r \geq 1$

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{l}}^{(r)}(x) &\stackrel{(6.2.2)}{=} \xi_1 b_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_1}^{(r-1)}(x) + \dots + \xi_{n+1} b_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_{n+1}}^{(r-1)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k \left(\sum_{|\mathbf{j}|=r-1} b_{\mathbf{l}+\mathbf{j}+\mathbf{e}_k} B_{\mathbf{j}}^{(r-1)}(x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k \left(\sum_{|\mathbf{j}|=r} b_{\mathbf{l}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_k}^{(r-1)}(x) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k \right) \left(\sum_{|\mathbf{j}|=r} b_{\mathbf{l}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{(r)}(x) \right) \end{aligned}$$

e poiché $\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = 1$ si conclude. ■

Dal punto di vista computazionale, l'algoritmo 6.1 pur offrendo un semplice ed interessante strumento di calcolo, esso **non è efficiente**. In [57] si è dimostrato che per valutare un polinomio definito sopra un triangolo (leggi *Bernstein-Bézier patch triangolare*) il metodo più efficiente è la forma di Taylor. Essi comunque hanno fornito una variante dell'algoritmo di De Casteljau che fa uso di una *forma polinomiale di Bernstein-Bézier modificata*. Essa è basata sulle moltiplicazioni annidate ereditate dallo schema di Hörner. La riduzione della complessità ottenuta è considerevole anche se ancora un pò più alta della forma di Taylor. Essi hanno inoltre applicato lo schema a polinomi definiti su tetraedri (ovvero 3-simplices). Un'estensione dell'algoritmo al caso multidimensionale con polinomi definiti su n -simplices è stata da noi implementata. In Appendice A si trovano tutti i dettagli e l'algoritmo per la valutazione di detto polinomio.

6.2.1 Funzionale di Riferimento e Spazio caratteristico

Proveremo ora, l'esistenza di uno spazio caratteristico associato allo schema di De Casteljau multivariato. L'analogo del Funzionale di Riferimento (6.1.14) per lo schema di De Casteljau è

DEFINIZIONE 6.2.1

$$\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}(\gamma) = \sum_{k=1}^{\tau_r(\mathbf{j})} B_{\mathbf{j},k}^{(r)}(x) \gamma(s_k) \quad |\mathbf{i}| = m - r, \quad |\mathbf{j}| = r \quad (6.2.4)$$

Per x fissato esso è detto il **Funzionale di Riferimento associato al polinomio $b_{\mathbf{i}}^r$** .

Per provare l'esistenza dello spazio caratteristico SC per il funzionale $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}$, ci serviremo dei polinomi $\mathcal{T}_{m,\mu}$ introdotti al capitolo 4.

A partire dalle espressioni (4.2.5), (4.2.6) e (4.2.14) riscriviamo il polinomio $\mathcal{T}_{m,\mu}(x)$ nella forma

$$\mathcal{T}_{m,\mu}(x) = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_{\mu}(x) B_{\alpha}^{(m)}(x) \quad (6.2.5)$$

dove ovviamente $\gamma_{\mu}(x) = (x_{\alpha} - x)^{\mu}$.

Abbiamo quindi gli strumenti per provare l'esistenza dello spazio caratteristico associato al funzionale $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}$.

TEOREMA 6.2.1 *Dato il polinomio approssimante $b_{\mathbf{i}}^{(r)}(x)$ determinato con l'algoritmo di De Casteljau (6.2.1) e (6.2.2) e il suo associato $FR, \mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}$ dato in (6.2.4).*

Allora esiste lo spazio SC, Γ^r , associato con $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}$ e risulta

$$\Gamma^r = \text{span} \langle 1, \gamma_{\mu} \rangle \quad |\mu| = 1$$

dove $\gamma_{\mu}(w) = (w - x)^{\mu}$.

DIM.: Dalla Proposizione 4.2.2, per ogni $r = 1, \dots, m$ abbiamo provato che $\mathcal{T}_{r,\mu} = 1$ se $|\mu| = 0$ mentre $\mathcal{T}_{r,\mu} = 0$ se $|\mu| = 1$. Questo implica che nel primo caso $\gamma_{r,\mu}(x) = 1$ mentre nel secondo $\gamma_{r,\mu}(x) = (x_{\alpha} - x)^{\mu}$. La cardinalità di questo secondo insieme di funzioni è esattamente $n + 1$, ovvero $\tau_1(\mu)$.

L'insieme $\Gamma^r = \{1, (x_{\alpha} - x)_{|\mu|=1, |\alpha|=r}^{\mu}\}$ è ancora un sistema (completo) di Tchebycheff su \mathbb{R} che soddisfa la (6.1.15). Inoltre, il funzionale $\mathcal{B}_{\mathbf{i}}^{(r)}$ applicato a queste funzioni verifica le relazioni (6.1.16). Quindi, lo spazio generato Γ^r , è il richiesto spazio caratteristico per l'operatore multivariato di Bernstein. ■

6.3 Condizioni di regolarità tra simplices adiacenti

Nella presente sezione presentiamo alcuni risultati relativi alle condizioni di regolarità tra polinomi in forma di Bernstein-Bézier (BB) definiti su simplices n -dimensionali. Parte di questo materiale è nel capitolo 5 in [15].

Sia $T_k = \{\lambda^0, \dots, \lambda^k\}$ un k -simplex in \mathbb{R}^n , con $0 \leq k < n$ e siano Σ_1 e Σ_2 due n -simplex aventi T_k come "faccia" comune. Detto altrimenti

$$\Sigma_1 = \{\lambda^0, \dots, \lambda^k, \lambda^{k+1}, \dots, \lambda^n\} \quad (6.3.1)$$

$$\Sigma_2 = \{\lambda^0, \dots, \lambda^k, \sigma^{k+1}, \dots, \sigma^n\} \quad (6.3.2)$$

e quindi $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = T_k$.

Supponiamo che sia data una funzione $f(x) \in \mathcal{C}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ tale che

$$f_{|\Sigma_1}(x) = P_m(x) = \sum_{|\beta|=m} a_{\beta}^m B_{\beta}^m(\xi) \quad (6.3.3)$$

$$f_{|\Sigma_2}(x) = Q_m(x) = \sum_{|\beta|=m} b_{\beta}^m B_{\beta}^m(\eta) \quad (6.3.4)$$

dove $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ e $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_n)$ sono le coordinate baricentriche di x relative a Σ_1 e Σ_2 rispettivamente. Si noti che

$$x \in T_k \iff x = \sum_{i=0}^k \xi_i \lambda^i = \sum_{i=0}^k \eta_i \lambda^i \quad (6.3.5)$$

quindi se $\xi_i = \eta_i$, $i = 0, \dots, k$.

Denotiamo ora con

$$D_y = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono vettori in \mathbb{R}^n . In particolare se $y = \lambda^i - \lambda^j$, possiamo scrivere in analogia con quanto fatto alla sezione 4.2

$$D_{ij} = D_{\lambda^i - \lambda^j} \quad (6.3.6)$$

Ci serve un'altra notazione. Indichiamo con $s_i\beta$ lo "shift" di 1 della i -esima componente del multiindice β , cioè

$$s_i\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i + 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n).$$

Da cui

$$\Delta_{ij} a_\beta^m = a_{s_i\beta}^m - a_{s_j\beta}^m \quad (6.3.7)$$

Tra D_{ij} e Δ_{ij} vale la seguente relazione per polinomi in forma di Bézier su simplices.

LEMMA 6.3.1 *Per $i \neq j$ si ha*

$$(D_{ij} P_m)(x) = m \sum_{|\beta|=m-1} \Delta_{ij} a_\beta^m B_\beta^{m-1}(\xi) \quad (6.3.8)$$

DIM.: Da $\lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i)$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ abbiamo

$$x_k = \sum_{j=0}^n \xi_j \lambda_k^j, \quad k = 1, \dots, n.$$

Abbiamo quindi

$$(D_{ij} P_m)(x) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^i - \lambda_k^j) \frac{\partial}{\partial x_k} P_m(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) P_m(x) \quad (6.3.9)$$

Allora, (6.3.8) segue con un cambiamento di indici nella seguente espressione

$$\sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} a_\beta^m \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \xi^\beta.$$

c.v.d. ■

Sia ora

$$c_{j,i} = \frac{\text{vol}_n(\lambda^0, \dots, \lambda^{i-1}, \sigma^j, \lambda^{i+1}, \dots, \lambda^n)}{\text{vol}_n(\lambda^0, \dots, \lambda^n)}. \quad (6.3.10)$$

Questo equivale a scrivere

$$\sigma^j = \sum_{i=0}^n c_{j,i} \lambda^i. \quad (6.3.11)$$

Il teorema seguente dà delle condizioni necessarie e sufficienti a cui devono soddisfare le *ordinate di Bézier* di $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ affinché una funzione $f \in \mathcal{C}^r(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$.

TEOREMA 6.3.1 *Sia $r \in \mathbb{N}$. Allora $f \in \mathcal{C}^r(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ se e solo se i coefficienti di $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ soddisfano la seguente relazione:*

$$\begin{aligned} & \Delta_{k+1,0}^{\theta_{k+1}} \cdots \Delta_{n,0}^{\theta_n} b_{(\beta_0, \dots, \beta_k, 0, \dots, 0)}^m = \\ & = \left(\sum_{i=1}^n c_{k+1,i} \Delta_{i,0} \right)^{\theta_{k+1}} \cdots \left(\sum_{i=1}^n c_{n,i} \Delta_{i,0} \right)^{\theta_n} a_{(\beta_0, \dots, \beta_k, 0, \dots, 0)}^m \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

dove $\theta_{k+1} + \cdots + \theta_n = l$, $\beta_0 + \cdots + \beta_k = m - l$ e $l = 0, \dots, r$.

In particolare,

$$f \in \mathcal{C}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \iff b_{(\beta_0, \dots, \beta_k, 0, \dots, 0)}^m = a_{(\beta_0, \dots, \beta_k, 0, \dots, 0)}^m$$

e $\beta_0 + \cdots + \beta_k = m$.

DIM.: Diamo solo alcune indicazioni. Osserviamo che se $x \in T_k$

$$D_{k+1,0}^{\theta_{k+1}} \cdots D_{n,0}^{\theta_n} P_m(x) = D_{k+1,0}^{\theta_{k+1}} \cdots D_{n,0}^{\theta_n} Q_m(x) \quad (6.3.13)$$

dove $\sum_{i=k+1}^n \theta_i = l$ e $l = 0, \dots, r$.

Per la relazione (6.3.11) si ha

$$\sigma^j - \lambda^0 = \sum_{i=1}^n c_{j,i} (\lambda^i - \lambda^0).$$

Per il lemma 6.3.1

$$\begin{aligned} & \left(D_{\sigma^j - \lambda^0}^\theta \right) P_m(x) = \left(\sum_{i=1}^n c_{j,i} D_{i,0} \right)^\theta P_m(x) = \\ & = \frac{m!}{(m-\theta)!} \sum_{|\beta|=m-\theta} \left(\sum_{i=1}^n c_{j,i} D_{i,0} \right)^\theta a_\beta^m B_\beta^{m-\theta}(\xi). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\left(D_{\sigma^j - \lambda^0}^\theta \right) Q_m(x) = \frac{m!}{(m-\theta)!} \sum_{|\beta|=m-\theta} \Delta_{j,0}^\theta b_\beta^m B_\beta^{m-\theta}(\eta).$$

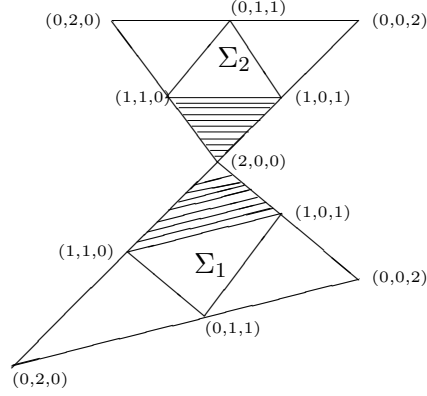


Fig. 6.1: Condizioni di regolarità per triangoli di ordine 2 .

Quindi, prendendo tutte le derivate direzionali miste di ordine r ed eguagliando le due espressioni con le corrispondenti nella faccia comune T_k , avremo tutte le condizioni richieste affinché $f \in \mathcal{C}^r(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. ■

Esempio 6.3.1 Per $n = 2, m = 2$ e $k = 0$ abbiamo

(i) $f \in \mathcal{C}^0(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ se e solo se

$$b_{(2,0,0)}^2 = a_{(2,0,0)}^2 \quad (6.3.14)$$

(ii) $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ se e solo se valgono (6.3.14) e le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} b_{(1,1,0)}^2 &= c_{1,0}a_{(2,0,0)}^2 + c_{1,1}a_{(1,1,0)}^2 + c_{1,2}a_{(1,0,1)}^2 \\ b_{(1,0,1)}^2 &= c_{2,0}a_{(2,0,0)}^2 + c_{2,1}a_{(1,1,0)}^2 + c_{2,2}a_{(1,0,1)}^2 \end{aligned}$$

(ii) $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ se e solo se $P_2(x) = Q_2(x)$.

Geometricamente parlando, $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ se e solo se i due triangolini formati con le Bézier net $\{b_{(2,0,0)}^2, b_{(1,1,0)}^2, b_{(1,0,1)}^2\}$ e $\{a_{(2,0,0)}^2, a_{(1,1,0)}^2, a_{(1,0,1)}^2\}$ sono **complanari** (vedi fig.6.1).



Due casi particolari nel caso bidimensionale si hanno quando $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = T_1 = \{\lambda^0, \lambda^1\}$ (vedi fig. 6.2). Questa situazione si presenta quando:

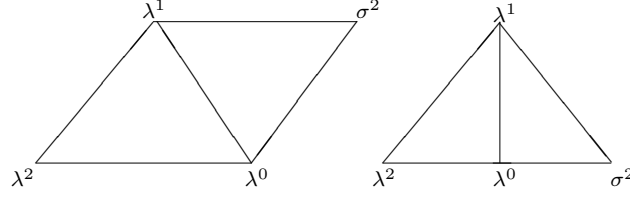


Fig. 6.2: Due casi particolari di adiacenza tra triangoli.

1. i due triangoli formano un parallelogramma;
2. i tre vertici $\lambda^0, \lambda^2, \sigma^2$ sono allineati e λ^0 è il punto medio del lato λ^2, σ^2 .

CASO 1.

Dal teorema 6.3.1, la 6.3.12 diventa semplicemente

$$\Delta_{2,0}^\theta b_{(i,j,0)}^m = (c_{2,1}\Delta_{1,0} + c_{2,2}\Delta_{2,0})^\theta a_{(i,j,0)}^m. \quad (6.3.15)$$

dove, mediante 6.3.10, $c_{2,0} = c_{2,1} = -c_{2,2} = 1$. Semplificando la 6.3.15 si prova il seguente corollario.

COROLLARIO 6.3.1 *Supponiamo che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = T_1 = \{\lambda^0, \lambda^1\}$ e che $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ sia un parallelogramma. Una funzione f è differenziabile fino all'ordine r , $r \geq 0$ su Σ se e solo se*

$$b_{(i,j,k)}^m = \sum_{l_1=0}^k (-1)^{l_1} \binom{k}{l_1} \sum_{l_2=0}^{k-l_1} \binom{k-l_1}{l_2} a_{(i+k-l_1-l_2, j+l_2, l_1)}^m \quad (6.3.16)$$

per tutte le terne $i + j + k = m$ e $k = 0, \dots, r$.

CASO 2.

I coefficienti $c_{2,i}$, $i = 0, 1, 2$ sono ora $c_{2,0} = 2$, $c_{2,1} = 0$, $c_{2,2} = -1$ e la (6.3.15) diventa semplicemente

$$\Delta_{2,0}^\theta b_{(i,j,0)}^m = (-\Delta_{2,0})^\theta a_{(i,j,0)}^m. \quad (6.3.17)$$

Il corollario che ne consegue è

COROLLARIO 6.3.2 *Supponiamo che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = T_1 = \{\lambda^0, \lambda^1\}$ e che $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è un triangolo $\{\lambda^1, \lambda^2, \sigma^2\}$ e λ^0 è il punto medio del segmento λ^2, σ^2 . Allora una funzione f è differenziabile fino all'ordine r , $r \geq 0$ su $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ se e solo se*

$$b_{(i,j,k)}^m = \sum_{l=0}^k (-1)^l 2^{k-l} \binom{k}{l} a_{(i+k-l, j, l)}^m \quad (6.3.18)$$

per tutte le terne $i + j + k = m$ e $k = 0, \dots, r$.

Capitolo 7

Interpolazione con curve e superfici frattali

7.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto alcuni metodi classici per determinare delle funzioni interpolanti o approssimanti su una data triangolazione. In questo capitolo discuteremo della costruzione di funzioni interpolanti mediante schemi iterativi sviluppati per la costruzione di superfici irregolari di dimensione frattale. A causa della natura frattale delle funzioni interpolanti, esse potranno essere continue o al più uniformemente continue. Ma nonostante la loro *irregolarità*, l'approccio sembra promettente poiché permette di utilizzare dei metodi di calcolo efficienti. Infatti, dal punto di vista computazionale esse sono ottenibili come *attrattori* di un insieme di mappe lineari, i.f.s. (*iterated function system*). L'attrattore è determinato come il limite delle iterate di queste mappe. Quindi, tutta l'informazione necessaria a definire le mappe è contenuta nei coefficienti che le definiscono e che sono facilmente memorizzabili in una matrice.

In quest'ottica possono essere viste le meshes per elementi finiti di tipo gerarchico. La ricerca e la costruzione dell'attrattore a cui converge la sequenza costituita dalle meshes per questa classe di elementi finiti è di fondamentale importanza per questo metodo.

Lo scopo di questo capitolo è di presentare la teoria dell'interpolazione frattale, alcune tecniche di calcolo dell'attrattore sia mediante la tecnica degli i.f.s. che mediante suddivisioni irregolari della triangolazione.

7.2 Attrattori e i.f.s.

Consideriamo uno spazio metrico compatto o un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^s , $s > 0$ $X = (X, d_X)$ dove d_X indica una metrica su X . Denoteremo con $\mathcal{H}(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X . Su $\mathcal{H}(X)$ prenderemo come metrica quella di Hausdorff, ovvero la funzione $h : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$. La coppia $(\mathcal{H}(X), h)$ indica lo spazio dove “vivono i frattali”. Esso è uno spazio metrico *completo* (vedi [4]).

Su $\mathcal{H}(X)$ consideriamo un insieme finito di funzioni continue

$$G = \{g_i : X \rightarrow X, i = 1, \dots, n\} \quad (7.2.1)$$

DEFINIZIONE 7.2.1 *La coppia $G_X = (G, X)$ è detta un iterated function system (che nel seguito abbrevieremo con i.f.s.) su X .*

Se le funzioni g_i sono delle contrazioni, allora G_X è detto iperbolico.

Un altro modo di indicare un i.f.s. basato su un insieme di funzioni G e su un insieme X è

$$G_X = \{X; g_i, i = 1, \dots, n\}.$$

DEFINIZIONE 7.2.2 *Un i.f.s. con probabilità su un insieme X , consiste di un i.f.s. G_X e di un insieme ordinato di numeri positivi $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ tali che $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ e $p_i > 0$.*

La probabilità p_i è associata a g_i .

Una possibile notazione per un tale i.f.s. è la seguente

$$G_{X, \mathbf{p}} = \{X, \mathbf{p}; g_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Esplicito riferimento alle probabilità può essere omesso se dal contesto è chiaro che si sta parlando di un i.f.s. con probabilità.

DEFINIZIONE 7.2.3 *Diremo che un insieme $K \subset \mathbb{R}^s$ è invariante se esiste un i.f.s. iperbolico G_X , tale che*

$$K = \bigcup_{i=1}^n g_i(K). \quad (7.2.2)$$

Un insieme invariante è determinato principalmente mediante una sequenza convergente di insiemi, calcolata iterativamente a partire dall'i.f.s. G_X e da una “regione poligonale” di \mathbb{R}^s . La contrattività delle mappe g_i e la completezza di $\mathcal{H}(X)$ ci garantiranno la convergenza.

DEFINIZIONE 7.2.4 Dato un i.f.s. iperbolico G_X , un insieme invariante K espresso dalla (7.2.2) sarà detto l'attrattore dell'i.f.s. G_X .

Nell'ipotesi di un i.f.s. iperbolico vale il seguente risultato che garantisce l'esistenza e l'unicità di un insieme invariante rispetto alle mappe $\{g_i\}$ (vedi [41]).

TEOREMA 7.2.1 Sia (X, d_X) uno spazio metrico completo e $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un insieme finito di contrazioni su X . Allora esiste un unico insieme chiuso e limitato K tale che valga (7.2.2). Inoltre K è compatto e può essere visto come la chiusura dell'insieme dei punti fissi γ_{i_1, \dots, i_p} delle composizioni (finite) $g_{i_1} \circ \dots \circ g_{i_p}$ di membri di G .

Per un arbitrario insieme $A \subset X$, sia $\mathcal{G}(A) = \bigcup_{i=1}^n g_i(A)$, $\mathcal{G}^p(A) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{p-1}(A))$.

Allora la funzione $\mathcal{G}^p(A) \rightarrow K$ è una metrica di Hausdorff.

7.3 Interpolazione con curve frattali

Nella presente sezione presentiamo l'interpolazione di un insieme di punti del piano con delle curve frattali. A questo proposito, consideriamo un insieme $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i), i = 0, \dots, n, n > 0\}$ di $n + 1$ punti distinti del piano. Sia $f : D = [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ l'interpolante lineare su \mathcal{S} .

Il grafico di f , $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$, può essere visto come l'attrattore di un i.f.s., $W_D = \{w_1, \dots, w_n\}$ definito su D .

Per garantire l'esistenza e l'unicità dell'attrattore in base al teorema 7.2.1, le funzioni w_i sono scelte come mappe contrattive con fattore di contrattività $0 \leq \lambda_i < 1$ del tipo

$$w_i(\mathbf{x}) = A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i \quad (7.3.1)$$

dove $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ g_i \end{pmatrix}$. Richiediamo inoltre che

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (7.3.2)$$

$$w_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (7.3.3)$$

Queste due ultime condizioni ci consentiranno di determinare i parametri a_i, c_i, e_i e g_i , mentre d_i rimarrà un parametro libero. La scelta di d_i come parametro libero segue dal fatto che la trasformazione w_i è una trasformazione di "shear" che quindi mappa linee parallele all'asse y in linee parallele al medesimo asse. Ciò implica che per ogni linea $R \parallel y$ si ha $d_i = \frac{|w_i(R)|}{|R|}$. Per questo motivo d_i è detto "fattore di scala verticale".

PROPOSIZIONE 7.3.1 *Se $d_i = 0$, allora $w_i(D)$ è l' i -esimo pezzo della spezzata interpolante l'insieme \mathcal{S} .*

DIM.: Se $d_i = 0$, allora $w_i(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_i x_i + e_i \\ c_i x_i + g_i \end{pmatrix}$. Le condizioni (7.3.2), (7.3.3) implicano

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta} \quad (7.3.4)$$

$$e_i = \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{\delta} \quad (7.3.5)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\delta} \quad (7.3.6)$$

$$g_i = \frac{x_n y_{i-1} - x_0 y_i}{\delta} \quad (7.3.7)$$

dove $\delta = x_n - x_0$.

Siano $x_0 < \bar{x} < x_n$ e $y_0 < \bar{y} < y_n$. Vogliamo provare che $w_i \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ sta sul segmento appartenente alla retta per (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i) , ovvero alla retta

$$r \equiv \frac{y_i(x - x_{i-1}) + y_{i-1}(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} = y(x).$$

Ora

$$a_i \bar{x} + e_i = \frac{x_i(\bar{x} - x_0) + x_{i-1}(x_n - \bar{x})}{\delta} \quad (7.3.8)$$

$$c_i \bar{x} + g_i = \frac{y_i(\bar{x} - x_0) + y_{i-1}(x_n - \bar{x})}{\delta} \quad (7.3.9)$$

da cui

$$w_i \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} & \bar{x} = x_0 \\ \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} & \bar{x} = x_n \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r & \text{per (7.3.8), (7.3.9)} \end{cases}$$

c.v.d. ■

PROPOSIZIONE 7.3.2 *Data l'interpolante lineare $f : D = [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{G}_f il suo grafico e l'i.f.s. iperbolico $W_D = \{w_1, \dots, w_n\}$. Allora \mathcal{G}_f è un insieme invariante tale che $\mathcal{G}_f = \bigcup_{i=1}^n w_i(\mathcal{G}_f)$.*

DIM.: Per ogni i , w_i ha attrattore il segmento congiungente i punti (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i) . Poiché per il Teorema 7.2.1 G_f è l'attrattore di W_D si ha $G_f = \bigcup_{i=1}^n w_i(G_f)$. ■

7.4 Funzioni frattali interpolanti generalizzate

Per estendere la teoria ad \mathbb{R}^s , $s > 2$, dobbiamo considerare funzioni definite su insiemi più generali.

DEFINIZIONE 7.4.1 Sia $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ uno spazio metrico completo e $f : K \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Y}$ una funzione. Un insieme generalizzato di punti è l'insieme

$$GD = \{(x_i, Y_i) \in \Xi = \mathbb{R} \times \mathbb{Y}, x_i \in K\}$$

con x_i in ordine crescente e $i \in \mathcal{I} = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

DEFINIZIONE 7.4.2 Una funzione $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che $f(x_i) = Y_i, \forall i$ sarà detta una funzione interpolante su GD.

Su GD definiamo n funzioni lineari $L_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $L_i(x) = a_i x + e_i$ per $i \in \mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \setminus \{0\}$ e a_i, e_i ottenuti dalle (7.3.2) e (7.3.3).

Siano ora c e σ due numeri reali tali che $c > 0, 0 \leq \sigma < 1$. Per ogni $i \in \mathcal{I}_0$, sia $M_i : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$ una funzione lipschitziana nella prima componente, cioè

$$d_{\mathbb{Y}}(M_i(a, Y), M_i(b, Y)) \leq c|a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{Y} \quad (7.4.1)$$

e contrattiva nella seconda

$$d_{\mathbb{Y}}(M_i(x, A), M_i(x, B)) \leq \sigma d_{\mathbb{Y}}(A, B) \quad \forall x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{Y} \quad (7.4.2)$$

Usando L_i e M_i definiamo la trasformazione

$$\begin{aligned} w_i : \Xi &\rightarrow \Xi \\ (x, Y) &\mapsto w_i(x, Y) = (L_i(x), M_i(x, Y)). \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

PROPOSIZIONE 7.4.1 L'i.f.s., $W_{\Xi} = \{\Xi; w_i, i \in \mathcal{I}_0\}$, con le mappe w_i definite in (7.4.3) è iperbolico rispetto alla metrica

$$d_{\Xi}(X_1, X_2) = |x_1 - x_2| + \lambda d_{\mathbb{Y}}(Y_1, Y_2) \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (7.4.4)$$

per tutti i punti $X_1 = (x_1, Y_1)$ e $X_2 = (x_2, Y_2)$ in Ξ .

DIM.: Dobbiamo provare che

$$d_{\Xi}(w_i(x_1, Y_1), w_i(x_2, Y_2)) \leq Ld_{\Xi}((x_1, Y_1), (x_2, Y_2)) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.4.5)$$

e $0 \leq L < 1$.

Per (7.4.3) e (7.4.4)

$$d_{\Xi}(w_i(x_1, Y_1), w_i(x_2, Y_2)) = |L_i(x_1) - L_i(x_2)| + \lambda d_{\mathbb{Y}}(M_i(x_1, Y_1), M_i(x_2, Y_2)). \quad (7.4.6)$$

Osserviamo che

$$d_{\mathbb{Y}}(M_i(x_1, Y_1), M_i(x_2, Y_2)) \leq d_{\mathbb{Y}}(M_i(x_1, Y_1), M_i(x_1, Y_2)) + d_{\mathbb{Y}}(M_i(x_1, Y_2), M_i(x_2, Y_2))$$

che mediante (7.4.1) e (7.4.2) diventa

$$d_{\mathbb{Y}}(M_i(x_1, Y_1), M_i(x_2, Y_2)) \leq \sigma d_{\mathbb{Y}}(Y_1, Y_2) + c|x_1 - x_2|.$$

Quindi

$$\begin{aligned} (7.4.6) &\leq \lambda \sigma d_{\mathbb{Y}}(Y_1, Y_2) + (\lambda c + |a_i|)|x_1 - x_2| \leq \\ &\leq \lambda \sigma d_{\mathbb{Y}}(Y_1, Y_2) + (\lambda c + a)|x_1 - x_2| \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

ove $a = \max_i \{|a_i|\} < 1$. Detto quindi $L = \max\{\sigma, \lambda c + a\} < 1$,

$$(7.4.7) \leq L \{\lambda d_{\mathbb{Y}}(Y_1, Y_2) + |x_1 - x_2|\} = Ld_{\Xi}((x_1, Y_1), (x_2, Y_2)).$$

Per una tale scelta di L l'i.f.s. è iperbolico. ■

PROPOSIZIONE 7.4.2 *Si consideri l'i.f.s. iperbolico*

$$W_Q = \{Q = I \times \mathbb{R}^2; I \subset \mathbb{R}, w_i, i = 1, \dots, n\}$$

dove le mappe $w_i(x, y, z)$ sono della forma

$$w_i(x, y, z) = (L_i(x), M_i(x, y, z)).$$

Allora il suo attrattore $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^2$ è il grafico di una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x_i) = (y_i, z_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Inoltre riscrivendo $f(x) = (\underbrace{f_1(x)}_y, \underbrace{f_2(x)}_z)$, allora $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua interpolante, tale che $f_1(x_i) = y_i$.

w	a	b	c	d	e	f
1	0	0.3	1	0.2	0	0
2	0.5	0	-0.5	0	0	1
3	0.5	0	-0.5	0.5	0.5	0.5

Tabella 7.1: Codice per l'i.f.s. dell'esempio 7.4.1

DIM.: Vedasi [?, 19]. ■

L'interesse di questa proposizione sta nel fatto che curve interpolanti frattali sono ottenibili considerando le proiezioni su un asse del grafico dell'attrattore di un i.f.s. definito su insiemi generalizzati. Diamo un esempio.

Esempio 7.4.1 Questo esempio è relativo alla costruzione di una *curva che ricopre una data regione del piano*, usando la definizione 7.4.1 di insieme di punti generalizzato. Sia \mathcal{B} il triangolo di fig. 7.2 e sia $S_{\mathcal{B}} = \{(0,0,0), (\frac{1}{3}, 0, 1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1, 0)\}$ un insieme di punti generalizzati. Consideriamo l'i.f.s., $W_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}; w_1, w_2, w_3\}$ il cui codice è dato in tabella 7.1, definito su $S_{\mathcal{B}}$. L'i.f.s. $W_{\mathcal{B}}$ soddisfa alla Proposizione 7.4.1 e quindi è iperbolico. Il suo attrattore è l'insieme \mathcal{G} che è il grafico di una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ corrispondente all'insieme generalizzato $S_{\mathcal{B}}$. Questa affermazione è conseguenza della Proposizione 7.4.2. È facile provare che la proiezione $\pi_{y,z} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di \mathcal{G} sul piano (y, z) è il triangolo \mathcal{B} . Anche le altre proiezioni ci danno delle curve interpolanti, come si può verificare in figura 7.1. Infatti, dalla figura 7.1 e con facili calcoli, le mappe affini w_i sono contrattive e sull'insieme $S_{\mathcal{B}}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} w_1^n = (0, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_2^n = (1, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_3^n = (0, 1)$. Quindi, $f([0, 1]) = \mathcal{B}$ come richiesto.

◇◇◇

Osservazioni

Questo esempio ci suggerisce un *metodo generale* di costruzione di “space-filling” curve. Vale infatti il seguente teorema la cui dimostrazione si trova in [3].

TEOREMA 7.4.1 Sia $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^2$ un insieme non vuoto, compatto e connesso per archi per il quale valgono le condizioni

- (i) esiste un i.f.s. iperbolico $\{\mathbb{R}^2, M_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ tale che \mathcal{A} è il suo attrattore;
- (ii) esiste un insieme di punti distinti $\{(y_i, z_i) \in \mathcal{A}; i = 1, \dots, n\}$ per cui $M_i(y_0, z_0) = (y_{i-1}, z_{i-1})$ e $M_i(y_n, z_n) = (y_i, z_i)$.

Fig. 7.1: *Proiezioni sui piani*

Allora, esiste una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f([0, 1]) = \mathcal{A}$.

Generalizzando l'esempio 7.4.1 mediante questo risultato, la funzione richiesta nel teorema precedente è quella il cui grafico è l'attrattore dell'i.f.s.

$$\{\mathbb{R}^3; w_i(x, y, z) = (L_i(x), M_i(y, z)), \quad i = 1, \dots, n\}$$

$$\text{con } L_i(x) = \frac{1}{n}x + \frac{i-1}{n}.$$

7.5 Superfici frattali su triangoli

Consideriamo il triangolo equilatero Σ di vertici $\sigma_0 = (0, 0)$, $\sigma_1 = (1, 0)$ e $\sigma_2 = (0, 1)$ e il quadrato $Q = [0, 1]^2$. Sul parallelepipedo $A = Q \times \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme di mappe, i.f.s., $W_A = \{A; w_i : A \rightarrow A, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$. Ciascuna funzione w_i è definita come segue:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (L_i(x, y), M_i(x, y, z))^t \quad (7.5.1)$$

dove $L_i : Q \rightarrow Q$ e $M_i : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Come nella precedente sezione, le funzioni w_i sono univocamente determinate dalle condizioni

$$w_i(\Sigma) = \Sigma_i \quad i = 1, \dots, n \quad (7.5.2)$$

ove Σ_i è un sottotriangolo di Σ (vedi fig. 7.2).

Richiediamo inoltre che $L_i(\Sigma) = \Sigma_i$ sia un omeomorfismo, M_i sia lipschitziana nelle componenti x, y e una contrazione in z (queste condizioni sono equivalenti alle (7.4.1) e (7.4.2) della sezione precedente).

Assumeremo ancora che

$$L_1(\sigma_0) = \sigma_0 \quad M_1(0, 0, 0) = 0 \quad (7.5.3)$$

e che esistano degli indici $i_0, i_1 \in \{1, \dots, n\}$ tali che

$$\begin{aligned} L_{i_0}(\sigma_1) &= \sigma_1 & L_{i_1}(\sigma_2) &= \sigma_2; \\ M_{i_0}(1, 0, 0) &= 0 & M_{i_1}(0, 1, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Si noti che le (7.5.4) sono equivalenti a (7.3.2) e (7.3.3).

In [46] è provato che W_A è iperbolico se le w_i sono definite come sopra. Vale infatti la seguente

PROPOSIZIONE 7.5.1 *Consideriamo l'i.f.s. $W_A = \{A; w_i : A \rightarrow A, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$. W_A è iperbolico rispetto alla metrica*

$$d_{A,\alpha}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \frac{1-c}{\alpha L} |z_1 - z_2| \quad (7.5.5)$$

dove $c = \max\{c_1, c_2\}$, c_1 è il fattore di contrazione di $L_i(x, \cdot)$ e c_2 il corrispondente per $L_i(\cdot, y)$; $L = \max\{L_1, L_2\}$, L_1 è la costante di Lipschitz di $M_i(x, \cdot, \cdot)$ e L_2 quella di $M_i(\cdot, y, \cdot)$. $\alpha > 1$ è un numero fissato.

Poiché W_A è iperbolico, siamo interessati al suo attrattore. A questo scopo si può provare (vedi [46, 19])

PROPOSIZIONE 7.5.2 *L'attrattore di W_A è il grafico di una funzione continua $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ che interpola sui vertici dei sottotriangoli Σ_i .*

DEFINIZIONE 7.5.1 *Chiamiamo superficie frattale il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che è un insieme frattale.*

Superfici frattali si ottengono semplicemente generalizzando la tecnica costruttiva delle trasformazioni lineari il cui attrattore è una curva frattale.

Esempio 7.5.1 Generalizzando (7.3.1) a \mathbb{R}^3 , consideriamo mappe affini della forma

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ g_i & h_i & l_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \\ m_i \end{pmatrix}. \quad (7.5.6)$$

Le funzioni L_i e M_i richieste in (7.5.1) sono:

$$L_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (7.5.7)$$

e

$$M_i(x, y, z) = g_i x + h_i y + l_i z + m_i \quad (7.5.8)$$

I coefficienti $a_i, b_i, c_i, d_i, g_i, h_i, e, f_i$ e g_i saranno determinati dalle condizioni sulle funzioni w_i , cioè $w_i(\Sigma) = \Sigma_i$, mentre i parametri $l_i, |l_i| < 1$ saranno scelti arbitrariamente.

◇◇◇

Esempio 7.5.2 Sia \mathcal{B} il triangolo in fig.7.2. Assumiamo che sui nodi i valori delle funzioni siano $0, 0, \frac{1}{2}, 1$, rispettivamente. Sia $W_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}; w_1, w_2\}$ l' i.f.s. definito su \mathcal{B} , con codice come in tabella 7.2. Assumendo che le corrispondenti probabilità siano le stesse, ovvero $p_1 = p_2 = 0.5$, è facile provare che il suo attrattore è l'insieme \mathcal{G} che è la superficie interpolante su \mathcal{B} .

◇◇◇

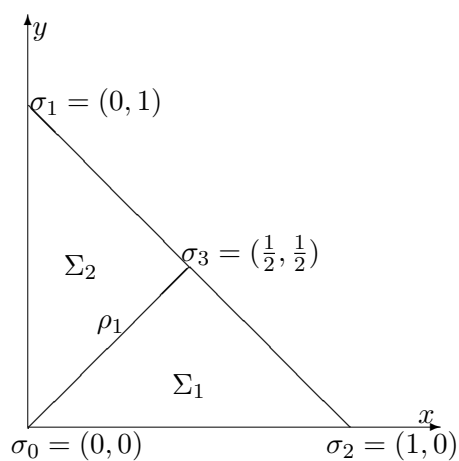


Fig. 7.2: Il simplex canonico suddiviso in due sottotriangoli

w	a	b	c	d	g	h	e	f	m
1	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.5	1.0	0.5	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabella 7.2: Codice per l' i.f.s. dell'esempio 7.5.2

7.6 Tecniche di calcolo di frattali interpolanti

Problema 5 *In quale modo possiamo determinare un i.f.s. tale che il suo attrattore sia una funzione interpolante su un dato dominio $D \in \mathbb{R}^s$, $s \geq 1$?*

In letteratura esistono solo alcune tecniche di costruzione di funzioni frattali interpolanti. La maggior parte è definita su domini mono o bi-dimensionali [3, 29, 25, 46].

7.6.1 Schemi di calcolo per curve frattali

Nella presente sezione ci occuperemo di descrivere due tecniche che sfruttano il formalismo degli i.f.s. nel caso monodimensionale e che ripercorrono passo passo la teoria che finora abbiamo descritto. Di seguito presentiamo le idee fondamentali su cui si basano questi algoritmi. L'algoritmo viene presentato in due forme: **deterministico** e **random**. In Appendice B presenteremo i due algoritmi per costruire curve frattali interpolanti, fornendo anche degli esempi grafici ottenuti con essi.

Algoritmo Deterministico

Consideriamo un i.f.s. (iperbolico) W_X , $X \subset \mathbb{R}^2$ e insieme compatto $A_0 \subset X$. A partire da A_0 costruiamo la successione di insiemi A_n ottenuta applicando l' i.f.s. W_X , ovvero

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n w_i(A_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.6.1)$$

La successione $\{A_n\}$ è una sequenza di insiemi compatti in $\mathcal{H}(X)$.

La convergenza verso l'attrattore dell'i.f.s., che esiste per il Teorema 7.2.1, può essere ulteriormente confermata dal seguente risultato [5].

TEOREMA 7.6.1 *Sia $W_X = \{X; w_i, i = 1, \dots, n\}$ un i.f.s. iperbolico con fattore di contrattività σ . Allora la trasformazione $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definita da*

$$W(C) = \bigcup_{i=1}^n w_i(C) \quad \forall C \in \mathcal{H}(X)$$

è una contrazione in $(\mathcal{H}(X), h)$ con fattore di contrazione σ . Il suo punto fisso \tilde{C} è tale che

$$\tilde{C} = W(\tilde{C}) = \bigcup_{i=1}^n w_i(\tilde{C})$$

ed è $\tilde{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(C)$, $\forall C \in \mathcal{H}(X)$.

Algoritmo Random

Consideriamo un i.f.s. con probabilità $W_{X,\mathbf{p}}$ che assumiamo iperbolico. Scelto $x_0 \in X$, il successivo elemento della sequenza di punti appartenenti alla curva verrà scelto alternativamente (mediante una funzione random) come segue

$$w_n \in \{w_1(x_{n-1}), \dots, w_n(x_{n-1})\} \quad n = 1, 2, \dots$$

dove al solito la probabilità dell'“evento” $x_n = w_i(x_{n-1})$ è p_i . Così facendo, costruiremo una sequenza $\{x_n\}$ di elementi in X .

La convergenza di detta sequenza verso l'attrattore di $W_{X,\mathbf{p}}$ è garantita dal “teorema ergodico di Elton” (vedi [5]).

TEOREMA 7.6.2 *Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e $W_{X,\mathbf{p}}$ un i.f.s. iperbolico. Indichiamo con $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ un'orbita dell'i.f.s., prodotta a partire da un $x_0 \in X$, data da*

$$x_n = (w_{\sigma_n} \circ w_{\sigma_{n-1}} \circ \dots \circ w_{\sigma_1})(x_0)$$

ove σ_i è una funzione di scelta della trasformazioni $\{w_i\}_{i=1}^n$ (eccetto quelle aventi probabilità nulla).

Detta μ una misura invariante per l'i.f.s., allora con probabilità 1 per tutte le funzioni continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f(x_k)}{n+1} = \int_X f(x) d\mu(x).$$

7.6.2 Uno schema di calcolo per superfici frattali

Nel caso di superfici, presentiamo un algoritmo deterministico che costruisce una sequenza di insiemi, come in (7.6.1), il cui attrattore è una superficie frattale.

Sia Ω una regione poligonale chiusa e non degenera in \mathbb{R}^2 contenente $n+1$ punti distinti $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. Il nostro scopo è di trovare una superficie frattale interpolante della forma $z = \gamma(x, y)$ tale che $\{z_i = \gamma(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. Assumiamo che Ω è triangolarizzabile e sia $\Sigma_\Omega = \{\Sigma_i\}_{i=1}^p$ una tale triangolazione. Sia inoltre $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ l'insieme dei vertici di Σ_Ω .

γ può essere vista come la superficie frattale che rappresenta l'attrattore di un dato i.f.s. $\{w_i : w_i = (L_i, M_i), i = 1, \dots, p\}$ ove L_i, M_i sono le funzioni definite nella precedente sezione. Inoltre $L_i : \Omega \rightarrow \Sigma_i$ e $M_i : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, p$. Usando le funzioni L_i, M_i definiamo la mappa $\Psi : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ come segue

$$(\Psi\gamma)(x) = M_i(L_i^{-1}(x), \gamma(L_i^{-1}(x))) \quad x \in \Sigma_i \quad i = 1, \dots, p \quad (7.6.2)$$

Ψ è ben definita e contrattiva nella sup-norma $\|\cdot\|_\infty$ su un opportuno sottoinsieme $\mathcal{C}(\Omega)$ [40]. Perciò essa ha un punto fisso $\tilde{\gamma}$ che definisce la superficie frattale interpolante. Mostriamo che $graph(\tilde{\gamma})$ è autoaffine ed esiste un algoritmo deterministico per determinarlo.

Facendo uso del *formalismo degli i.f.s. ricorrenti* [6], consideriamo l'insieme \mathcal{H} di tutti i sottoinsiemi compatti e non vuoti di \mathbb{R}^3 . A partire da \mathcal{H} costruiamo il prodotto cartesiano

$$\mathcal{H}^p = \underbrace{\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}}_p. \quad (7.6.3)$$

Sia ora $\chi(i) = \{j : \Sigma_j \subset \rho_{\kappa(i)}\}$ dove $\kappa : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ è tale che $L_i(\rho_{\kappa(i)}) = \Sigma_i$. Ciò significa che data la triangolazione Σ_Ω , costruiamo la triangolazione $R_\Omega = \{\rho_k\}_{k=1}^r$ composta da r sottoregioni triangolari di Ω ottenuta come unione di *qualche* triangolo di Σ_Ω . I vertici della triangolazione Σ_Ω sono ordinati in modo che $\{\sigma_1, \dots, \sigma_l\} \subset \mathcal{S}$ è l'insieme dei vertici di R_Ω , vedi fig. 7.2.

Su \mathcal{H}^p definiamo la funzione $F : \mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^p$ la cui i -esima componente è data da

$$F_i(A_1, \dots, A_p) = w_i \left(\bigcup_{j \in \chi(i)} A_j \right) \quad i = 1, \dots, p \quad (7.6.4)$$

dove le funzioni $\{w_i\}_{i=1}^p$ sono date come in sopra. Abbiamo bisogno di qualche definizione.

DEFINIZIONE 7.6.1 *Sia ϑ un piano non verticale in \mathbb{R}^3 . Denotiamo con $\mathcal{C}_\vartheta(\Omega)$ l'insieme*

$$\mathcal{C}_\vartheta(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } (x, f(x)) \in \vartheta, \forall x \in \partial\Omega\} \quad (7.6.5)$$

DEFINIZIONE 7.6.2 *Consideriamo su Ω l'insieme di punti $\sigma_i = (x_i, y_i)$ e siano z_i i valori assunti da una funzione che interpola su $\{(\sigma_i, z_i)\}_{i=1}^n$. Denotiamo con $\mathcal{C}_B(\Omega)$ l'insieme*

$$\mathcal{C}_B(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } f(\sigma_j) = z_j, \forall \sigma_j \in \partial\Omega\} \quad (7.6.6)$$

Osserviamo che la mappa Ψ è contrattiva sia su \mathcal{C}_ϑ che su \mathcal{C}_B . Infine presentiamo il risultato, che ha suggerito l'algoritmo.

TEOREMA 7.6.3 . *Sia data $\gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale valgono le seguenti proprietà:*

- (a) $\gamma \in \mathcal{C}_\vartheta(\Omega)$ oppure $\gamma \in \mathcal{C}_B(\Omega)$;
- (b) data la triangolazione Σ_Ω assumiamo che il grafo associato con Σ_Ω abbia numero cromatico⁶ uguale 3.

⁶Il numero cromatico associato ai nodi di un grafo, è il numero minimo di colori da utilizzare affinché due nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore

Allora

$$\text{graph}(\Psi\gamma|_{\Sigma_i}) = F_i(\text{graph}(\gamma)_{\Sigma_1}, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_2}, \dots, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_p}) \quad i = 1, \dots, p \quad (7.6.7)$$

DIM.: Vedi [40]. ■

Poiché $F_i(\text{graph}(\gamma)_{\Sigma_1}, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_2}, \dots, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_p}) = w_i \left(\bigcup_{j \in \chi(i)} A_j \right)$ il teorema precedente porta al seguente algoritmo.

Algoritmo 7.1

1. Scegli come insieme iniziale su cui iterare, l'insieme $A_0 = (\text{graph}(\gamma)_{\Sigma_1}, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_2}, \dots, \text{graph}(\gamma)_{\Sigma_p})$;
2. per $n = 1, 2, \dots$
 $A_n = F(A_{n-1})$
3. Infine, $A_n \rightarrow \tilde{\gamma}$, dove $\tilde{\gamma}$ è una superficie frattale.

Per quanto riguarda la convergenza ammessa al passo 3., dobbiamo verificare che F è contrattiva in \mathcal{H}^p o equivalentemente, tramite (7.6.7), che per ogni $\epsilon > 0$, $\|\Psi^{\circ k}\gamma - \tilde{\gamma}\|_H < \epsilon$. Ma Ψ è contrattiva su \mathcal{C}_ϑ e \mathcal{C}_B , quindi possiamo concludere che

$$A_n \rightarrow (\text{graph}(\tilde{\gamma})_{\Sigma_1}, \text{graph}(\tilde{\gamma})_{\Sigma_2}, \dots, \text{graph}(\tilde{\gamma})_{\Sigma_p})$$

$$\text{e } \bigcup_{k=1}^n A_k^{(i)} \rightarrow \text{graph}(\tilde{\gamma}).$$

7.7 Funzioni interpolanti su triangolazioni irregolari

Nel Capitolo 2. si sono introdotte le triangolazioni irregolari sottolineando che esse sono utili nella determinazione di elementi finiti non conformi.

Un altro aspetto legato a queste suddivisioni è la generazione di superfici irregolari e in particolare delle superfici frattali interpolanti. Presentiamo ora un metodo descritto in [29, 23] che consente di costruire una funzione interpolante su triangoli irregolarmente suddivisi di ordine 2. Il metodo è estendibile a suddivisioni irregolari di ordine $m > 2$ qualsiasi. Dimostremo inoltre che all'infittire della suddivisione, la funzione interpolante è uniformemente continua.

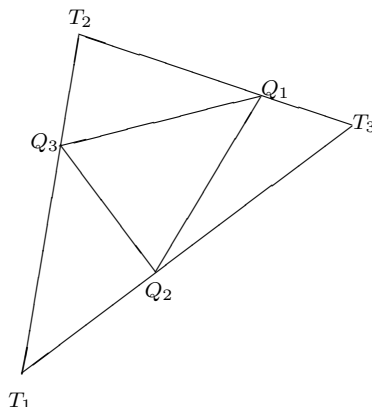


Fig. 7.3: *Un triangolo irregolarmente suddiviso di ordine 2*

L'interesse per questo approccio sta nella sua applicazione a meshes di elementi finiti non strutturate [47]. Un tipico esempio in cui esse sorgono, sono i sistemi differenziali di tipo iperbolico, quali i problemi di acque basse, dove le meshes generate devono affrontare grandi variazioni nella soluzione del problema.

In [23] si è affrontato il problema di applicare questa tecnica di interpolazione, a meshes ottenute con la tecnica dell' "advancing front", nel seguito AF (vedi [47, 23]). Nel seguito supporremo l'esistenza di una mesh ottenuta con tale tecnica e cercheremo la soluzione interpolando con una superficie basata su una suddivisione irregolare, del tipo presentato in figura 2.4.

7.7.1 Proprietà e costruzione di superfici irregolari

Consideriamo il generico triangolo T di una mesh ottenuta ad esempio con la tecnica AF. Siano T_1, T_2, T_3 i suoi vertici, vedi fig. 7.3.

Denotiamo con X_n l'insieme dei vertici dei triangoli generati dopo n passi di una suddivisione irregolare di ordine due, come presentata alla sezione 2.2.1. È facile provare che la successione $\{X_n\}$ è crescente e convergente verso un insieme X denso in T . Detto $X_0 = \{T_1, T_2, T_3\}$, estendiamo la funzione (lineare) f interpolante sui vertici, quindi su X_0 , all'insieme $X_1 = X_0 \cup \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, ove i punti Q_i sono dati dalla (2.2.2), mediante

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= (1 - \alpha_{11})f(T_2) + \alpha_{11}f(T_3) = (1 - \alpha_{11})z_2 + \alpha_{11}z_3 \\ f(Q_2) &= (1 - \alpha_{12})f(T_3) + \alpha_{12}f(T_1) = (1 - \alpha_{12})z_3 + \alpha_{12}z_1 \\ f(Q_3) &= (1 - \alpha_{13})f(T_1) + \alpha_{13}f(T_2) = (1 - \alpha_{13})z_1 + \alpha_{13}z_2 \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

e i valori $\{z_1, z_2, z_3\}$ sono i valori assunti da f nei vertici. Continuando estendiamo f a X_n $n > 1$.

La domanda che diventa ovvia in tale costruzione può essere formulata come segue:
Sotto quali condizioni sui parametri $\alpha_{n,j}$ $j = 1, 2, 3$ la funzione f è uniformemente continua su X ?

Premettiamo

LEMMA 7.7.1 *Sia $\mu_i = \max_{j \in \{1,2,3\}} \{\alpha_{ij}, 1 - \alpha_{ij}\}$. Con Δ indichiamo le “variazioni” di f lungo un lato del triangolo generato all’ n -esimo passo.*

Allora Δ soddisfa la relazione

$$|\Delta| \leq M_{n-1} \epsilon_0 \quad (7.7.2)$$

dove $M_{n-i} = \prod_{j=0}^{n-i} \mu_{n-j}$ $i = 1, \dots, n$ e $\epsilon_0 = \max\{|z_2 - z_1|, |z_1 - z_3|, |z_2 - z_3|\}$.

DIM.: Per induzione su n .

Per $n = 1$, sui quattro triangoli generati in questo passo valutiamo gli incrementi di f su ciascuno di essi. Per esempio sul triangolo $T_1Q_2Q_3$ (vedi fig. 7.3) abbiamo:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= |f(Q_3) - z_1| = |\alpha_{13}(z_2 - z_1)| \leq \alpha_{13} \epsilon_0 \\ \delta_2 &= |f(Q_2) - z_1| = |(1 - \alpha_{12})(z_3 - z_1)| \leq (1 - \alpha_{12}) \epsilon_0 \\ \delta_3 &= |f(Q_3) - f(Q_2)| = |\alpha_{13}(z_2 - z_1) + \alpha_{12}(z_1 - z_3)| \leq \max\{\alpha_{13}, \alpha_{12}\} \epsilon_0 \end{aligned} \quad (7.7.3)$$

Allora, se $\gamma_1 = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, si ha $\gamma_1 \leq \max\{\alpha_{12}, \alpha_{13}, 1 - \alpha_{12}\} \epsilon_0$. Allo stesso modo siano $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ gli incrementi di f lungo i lati dei triangolini $T_2Q_1Q_3$, $T_3Q_1Q_2$ e $Q_3Q_1Q_2$, rispettivamente. Quindi

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\leq \max\{\alpha_{11}, 1 - \alpha_{11}\} \epsilon_0 \\ \gamma_3 &\leq \max\{\alpha_{12}, 1 - \alpha_{11}, 1 - \alpha_{12}\} \epsilon_0 \\ \gamma_4 &\leq \max\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, 1 - \alpha_{11}, 1 - \alpha_{12}, 1 - \alpha_{13}\} \epsilon_0 \end{aligned}$$

Ma poiché $M_1 = \mu_1$ si conclude

$$|\Delta| \leq \mu_1 \epsilon_0 \quad (7.7.4)$$

Se $n > 1$, il risultato si estende in maniera ovvia. ■

Vale la pena di dire qualcosa sulle situazioni degenerative. Ovvero

In quale modo possiamo controllare i parametri $\{\alpha_{ij} \ j = 1, 2, 3, \ i = 1, 2, \dots\}$ per evitare la costruzione di triangoli degeneri?

Per fare questo, indichiamo con λ_n la lunghezza del lato più lungo di tutti i triangoli generati all’ n -esimo passo, mentre con R_n e ρ_i le seguenti quantità: $R_n = \prod_{i=1}^n \rho_i$, $\rho_i =$

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \{\alpha_{ij}, 1 - \alpha_{ij}\}.$$

LEMMA 7.7.2 *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$*

DIM.: Ancora una volta la dimostrazione si fa per induzione su n .

Consideriamo $n = 1$. Dobbiamo distinguere due casi.

1. Il lato di lunghezza λ_1 sta sui lati del triangolo originale T . Allora $\lambda_1 \leq \rho_1 \lambda_0 = R_1 \lambda_0$, where $\lambda_0 = \max\{|T_1T_2|, |T_1T_3|, |T_2T_3|\}$.
2. Il lato di lunghezza λ_1 sta all'interno di T , cioè esso è uno dei lati del triangolo Q_1, Q_2, Q_3 . Assumiamo che $\lambda_1 = |Q_2Q_3|$.
Dobbiamo distinguere ancora due sottocasi

2.1 Tutti gli angoli sono acuti.

Dividiamo i lati T_1T_2, T_1T_3 con una omotetia di centro T_1 e rapporto ρ_1 . Questo origina due nuovi punti A_1 e A_2 appartenenti ai lati T_1T_2 e T_1T_3 , rispettivamente.

$$A_1 = (1 - \rho_1)T_1 + T_2$$

$$A_2 = (1 - \rho_1)T_1 + T_3$$

Quindi, $|Q_3 - Q_2| \leq |A_2 - A_1| = \rho_1|T_3 - T_2| \leq \rho_1 \lambda_0$. Ma allora per tutti i valori di n si ha che

$$\lambda_n \leq \rho_n \leq \dots \leq \rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_0 \lambda_0 = R_n \lambda_0.$$

2.2 C'è almeno un angolo attuso.

Allora $|Q_3 - Q_2| \leq |Q_2 - T_1| \leq \rho_1 \lambda_0$. Segue la stessa conclusione.

Concludendo, il risultato vale per $n = 1$.

Per $n > 1$ basta applicare un ragionamento analogo. ■

Usando questi due risultati siamo in grado di dare una condizione sufficiente affinché la funzione f sia uniformemente continua.

Definiamo

$$\tau_n = \inf\{|x - y|, x \in T_n^{(i)}, y \in T_n^{(j)}, T_n^{(i)} \cap T_n^{(j)} = \emptyset\} \quad (7.7.5)$$

dove $T_n^{(i)}$ e $T_n^{(j)}$ sono due triangoli generati al passo n .

TEOREMA 7.7.1 *Assumiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converga.*

Allora f è uniformemente continua, cioè per $x, y \in X$ tali che $|x - y| \leq \tau_n$, si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\epsilon_0 \left(\sum_{k=n-1}^{\infty} M_k \right) \quad (7.7.6)$$

DIM.: Siano $x, y \in X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tali che $|x - y| < \tau_n = \frac{\epsilon}{2^n}$, $\forall \epsilon > 0$. Possiamo assumere che $x, y \in X_i$ per $i \geq n$ e $i = n + l$, $l \geq 1$.
 Sia $\{x_k\}_{k=n, \dots, i=n+l}$ una suquenza tale che $x_i = x_{n+l} = x$ e x_{i-j} , $j = 1, \dots, l$ è il vertice più vicino x_{i-j+1} generato all'iterazione $(i - j)$ -esima.
 Per mezzo del Lemma 7.7.1, abbiamo

$$|f(x_{i-j}) - f(x_{i-j+1})| \leq \epsilon_0 M_{i-j} \quad 1 \leq j \leq l.$$

Quindi,

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \epsilon_0 M_{n+l-1} + \dots + \epsilon_0 M_n \leq \epsilon_0 \sum_{r=n}^{\infty} M_r.$$

Similmente per la sequenza $\{y_k\}_{k=n, \dots, n+l}$ avremo

$$|f(y) - f(y_n)| \leq \epsilon_0 \sum_{r=n}^{\infty} M_r.$$

Inoltre, notiamo che x_n e y_n non possono essere “troppo” lontani dal momento che appartengono a triangoli adiacenti.

Sia ora $T_n(x)$ il triangolo generato alla iterazione n -esima contenente il punto x e che ha x_n come uno dei suoi vertici. $T_n(y)$ sia il corrispondente triangolo di $T_n(x)$ contenente y .

Diciamo che $T_n(x) \cap T_n(y) \neq \emptyset$.

Infatti, non può essere che $T_n(x) \cap T_n(y) = \emptyset$, poiché $x \in T_n(x)$, $y \in T_n(y)$ e $|x - y| \leq \tau_n \rightarrow 0$. Infine,

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq 2\epsilon_0 M_{n-1}$$

da cui segue che

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\epsilon_0 \sum_{r=n-1}^{\infty} M_r.$$

c.v.d. ■

Osservazioni conclusive

Nei problemi di approssimazione la scelta della discretizzazione da impiegare dipende molto dal problema che uno deve risolvere. Ad esempio per problemi descritti con sistemi di PDE di tipo iperbolico, la mesh deve essere generata in maniera da trattare nel migliore modo possibile “grandi” variazioni nel comportamento della soluzione. Questo significa che si dovranno usare le meshes più fini dove ciò accade.

L'approccio UGT “*Unstructured Grid of Triangles*” descritto in [47, 23], sembra soddisfare tali richieste. In letteratura esistono principalmente due famiglie di algoritmi per la generazione di meshes UGT, quelle basate sulla triangolazione di Delauney sul piano [64] e quelle che usano la tecnica “advancing front” (AF) [39, 44].

In [23] si è verificato che a partire da una discretizzazione non strutturata generata con la tecnica AF e raffinando con triangoli irregolari si generano superfici irregolari che possono essere usate per costruire una approssimante della soluzione di una PDE iperbolica. In futuro si desidera estendere questa tecnica al caso n -dimensionale.

Appendice A

Calcolo di polinomi multivariati: algoritmi

A.1 Polinomi di Lagrange

Esistono molti modi di calcolare un polinomio interpolante su un simplex. Ad esempio in [38] è presentato il metodo di Neville-Aitken - quindi il polinomio interpolante di Lagrange - a partire da certi sistemi "regolari" di nodi, per esempio delle distribuzioni simpliciali. Il metodo è poi stato esteso a immagini proiettive dell'insieme di nodi scelti.

Un'altra procedura di calcolo è presentata in [15] al Capitolo 9. In questo caso i punti necessari a risolvere il problema di interpolazione sono posizionati cosicchè esistono $n + 1$ rette, r_0, \dots, r_n tali che nello spazio lineare $r_i \setminus \{\bigcup_{j=i+1}^n r_j\}$ ci sono esattamente $i + 1$ nodi. Questo insieme è quindi provato essere unisolvante per il problema di interpolazione di Lagrange. Noi abbiamo scelto di riferirci a una generalizzazione di un metodo presentato in [60] per la costruzione di splines planari.

Idea generale

Si determinano i polinomi *elementari di Lagrange di grado m* $L_j^{(m)}(x) \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, d = K_{m,n}$, ovvero i polinomi che devono soddisfare la ben nota proprietà

$$L_j^{(m)}(x_\lambda) = \delta_{j,\lambda} \quad j=1,\dots,d \tag{A.1.1}$$

come prodotto di polinomi lineari.

Questo problema è rilevante sia dal punto di vista teorico che pratico. Teoricamente vale il seguente risultato dovuto a Nicolaidis (vedi [51]):

TEOREMA A.1.1 *Dati $m, p \in \mathbb{Z}$, $p \leq m$ e $\Gamma_{n-1,j}$, $j = 0, \dots, p-1$ siano p distinti iperpiani. Siano inoltre dati p polinomi lineari $\lambda_j(x)$, $j = 0, \dots, p-1$, tali che $\lambda_j(x) = 0$ se $x \in \Gamma_{n-1,j}$. Dato un polinomio $P \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^n)$ tale che $P(x) = 0$ se $x \in \Gamma_{n-1,j}$, $j = 0, \dots, p-1$. Allora il polinomio $P(x)$ può essere scritto*

$$P(x) = \left(\prod_{i=0}^{p-1} \lambda_i(x) \right) Q(x) \quad (\text{A.1.2})$$

dove $Q \in \mathbb{P}_{m-p}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazioni

- (i) Il risultato del teorema è conseguenza del fatto che “se $p \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^n)$ e $p \equiv 0$ su un iperpiano H di equazione $h(x) = 0$, allora esiste un unico $q \in \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tale che $p(x) = q(x)h(x)$ ”. Questo risultato è la Proposizione 2.3.3 del Capitolo 2.
- (ii) Il teorema fornisce un modo di calcolare un polinomio interpolante su un n -simplex. È ovvio che se siamo capaci di individuare gli iperpiani (cioè i polinomi lineari) dove il polinomio si annulla allora possiamo fattorizzare il polinomio come in (A.1.2).
- (iii) In particolare se $p = m$, nel Teorema A.1.1, allora possiamo scrivere ogni polinomio $P \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}^n)$, che soddisfa le ipotesi, come prodotto di m polinomi lineari.

Dato un polinomio lineare in \mathbb{R}^n

$$l(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (\text{A.1.3})$$

per determinare i suoi coefficienti $\{a_i\}_{i=0, \dots, n}$ assumiamo che negli $n+1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n assuma il valore 0 eccetto che in un punto dove vale 1. Senza perdita di generalità possiamo assumere che in x_0 il suo valore sia 1.

Inoltre assumiamo che questi punti non sono complanari. Questa condizione è facilmente soddisfatta se almeno uno di essi è scelto in un altro iperpiano. Ciò significa che il corrispondente determinante di Vandermonde è diverso da zero.

Esempio A.1.1 Consideriamo un caso 2 dimensionale. Sia \mathcal{A} il 2-lattice disegnato in fig.A.1. Vogliamo determinare il polinomio di Lagrange di grado 2, $L_1^{(2)}(x)$ relativo al vertice x_1 . Per fare questo seguendo le idee del teorema A.1.1, determiniamo due polinomi lineari $l_1^{(1)}(x), l_1^{(2)}(x)$, dove $l_1^{(1)}(x) = 1$ per $x = x_1$ e 0 in x_2, x_6 , mentre $l_1^{(2)}(x) = 1$ per $x = x_1$ e 0 in x_3, x_5 . Il risultante polinomio di Lagrange

$$L_1^{(2)}(x) = l_1^{(1)}(x) \cdot l_1^{(2)}(x) \quad (\text{A.1.4})$$

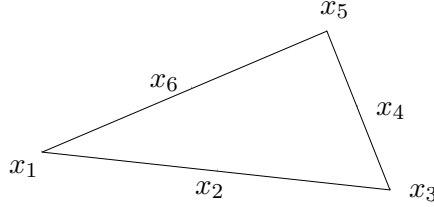


Fig. A.1: Un triangolo con distribuzione “sequenziale” dei punti di interpolazione

Si verifica facilmente che $L_1^{(2)}(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$ e che soddisfa (A.1.1).

In maniera del tutto analoga, determineremo i polinomi $L_3^{(2)}(x)$ e $L_5^{(2)}(x)$.

Per ottenere $L_2^{(2)}(x)$ dobbiamo ancora risolvere un determinante di Vandermonde di ordine 3 imponendo che su x_2 i polinomi lineari $l_2^{(1)}(x)$, $l_2^{(2)}(x)$ assumano il valore 1 e il valore 0 su x_6, x_1 e x_3, x_5 rispettivamente.



La procedura per un arbitrario grado m può facilmente essere ottenuta usando il teorema A.1.1 o, *in questo caso* l'equivalente proprietà che *il prodotto di \mathbf{m} polinomi lineari della forma (A.1.3) è un elemento dello spazio $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}^n)$.*

L'algoritmo in \mathbb{R}^2 può essere descritto come segue

Algoritmo A.1

1. Determina $L_1^{(m)}(x)$
 - for $\lambda = 1, \dots, m$ do
 - determina $l_1^{(\lambda)} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$, dove
 - $l_1^{(\lambda)}(x_1) = 1, l_1^{(\lambda)}(x_{\lambda+1}) = 0, \dots, l_1^{(\lambda)}(x_{\lambda+n-1}) = 0, l_1^{(\lambda)}(x_{d+1-\lambda}) = 0$
 - end for;
 - $$L_1^{(m)}(x) = \prod_{\lambda=1}^m l_1^{(\lambda)}(x);$$
2. Determina $L_k^{(m)}(x)$ $k = 2, \dots, m$
 - for $k=2, \dots, m$ do
 - for $\lambda = 1, \dots, m+1$ do
 - if $\lambda \neq k$ then
 - determina $l_k^{(m)} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ dove
 - $l_k^{(\lambda)}(x_k) = 1, l_k^{(\lambda)}(x_k) = 0, l_k^{(\lambda)}(x_\lambda) = 0, l_k^{(\lambda)}(x_{2m+1}) = 0$

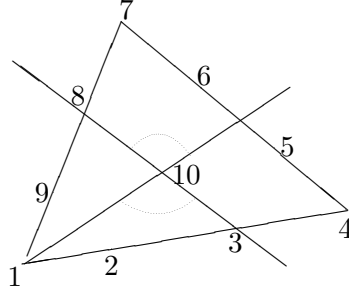


Fig. A.2: Un triangolo di ordine 3 con nodi etichettati in ordine sequenziale. È evidenziato il “cono” su cui scegliere il terzo nodo

end for;

$$L_k^{(m)}(x) = \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^{m+1} l_k^{(\lambda)}(x);$$

end for;

- 3.** In maniera del tutto analoga, determina $L_k^{(m)}(x)$ per $k = m + 1, \dots, d$ facendo attenzione a separare il calcolo per k che varia sui lati del triangolo e k che varia sui nodi interni.

La scelta dei nodi interni merita una particolare attenzione. Supponiamo di avere un triangolo con nodi etichettati in modo sequenziale e antiorario partendo dal nodo che sta sul vertice più in basso sulla sinistra del triangolo. I *nodi interni* si trovano intersecando rette parallele ai lati congiungenti i vertici aventi nodi etichettati con $m + 1$ e $2m + 1$ per il nodo k (con $2m + 2 \leq k \leq s - 1$) con le rette parallele ai lati congiungenti i nodi 1 e $m + 1$ per il nodo etichettato con s (dove $2m + 2 \leq s \leq 3m$). Il punto chiave di questa costruzione è la scelta del **terzo** nodo nell’algoritmo A.1 per la determinazione del polinomio lineare necessario ad ogni passo per la costruzione dei polinomi elementari di Lagrange. A tale proposito si può dimostrare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE A.1.1 Dato un 2-simplex di ordine m con i nodi etichettati in maniera sequenziale.

Se $m \geq 3$ il terzo nodo x_k usato nel calcolare le componenti lineari del polinomio interpolante di Lagrange (basato su quei nodi), può essere scelto con $k = m + 2$ ovvero $k = 3m$.

DIM.: I nodi interni nella nostra costruzione hanno etichette nell’insieme $\mathcal{L} = \{3m + 1, \dots, K_{m,2}\}$. Prendiamo $\bar{s} \in \mathcal{L}$. L’algoritmo a questo passo deve determinare m polinomi lineari basati sulle terne di etichette $[\bar{s} \ 1 \ k], \dots, [\bar{s} \ m \ k]$ per il primo polinomio e similmente per gli altri. L’importante è conoscere il valore di k in modo che il problema di trovare le

componenti lineari abbia soluzione (vedi fig. A.2 per il caso $m = 3$).

Consideriamo il cono avente per lati le rette passanti per i nodi $1, \bar{s}$ e m, \bar{s} . Questo cono non passa per i nodi $m + 2$ e $3m$ come facilmente si controlla. Perciò, per determinare il polinomio lineare basato su nodi interni possiamo scegliere l'etichetta del terzo nodo con $k = m + 2$ o $k = 3m$. ■

A.2 Bézier patches

In questo caso abbiamo visto che l'*Algoritmo di De Casteljau* multivariato è un metodo particolarmente utile per determinare un patch di Bézier su un n -simplex. Una versione migliorata che riduce sensibilmente la complessità computazionale è l'*Algoritmo VSC* presentato in [56, 57].

Di seguito presentiamo una versione n -dimensionale di questo algoritmo.

Sia $b^{(m)}(x) = \sum_{|\mathbf{j}|=m} B_{\mathbf{j}}^m(\xi) b_{\mathbf{j}}$ il polinomio di grado m in forma di Bézier-Bernstein. Esso può risciversi come:

$$b^{(m)}(x) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{i_{n-1}} b_{m-i_1, i_1-i_2, \dots, i_n} \frac{m!}{(m-i_1)! \cdots i_n!} \xi_1^{m-i_1} \xi_2^{i_1-i_2} \cdots \xi_{n+1}^{i_n} \quad (\text{A.2.1})$$

(con ovvio significato per i coefficienti $b_{m-i_1, i_1-i_2, \dots, i_n}$).

Riscriviamo (A.2.1) in *maniera modificata*

$$b^{(m)}(x) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{i_{n-1}} c_{m-i_1, i_1-i_2, \dots, i_n} \xi_1^{m-i_1} \xi_2^{i_1-i_2} \cdots \xi_{n+1}^{i_n} \quad (\text{A.2.2})$$

dove

$$c_{m-i_1, i_1-i_2, \dots, i_n} = \frac{m!}{(m-i_1)!(i_1-i_2)! \cdots i_n!} b_{m-i_1, i_1-i_2, \dots, i_n}$$

and $i_1 = 0, \dots, m$ and $i_k = 0, \dots, i_{k-1}$, $k = 2, \dots, n$.

Questo, dal punto di vista geometrico, è equivalente a suddividere il nostro simplex in $n + 1$ sottoregioni. Nell' i -esima regione le coordinate baricentriche verificheranno le relazioni

$$\xi_i \geq \xi_j \quad j \neq i \quad j = 1, \dots, n + 1. \quad (\text{A.2.3})$$

Se nell' i -esima regione, $\xi_i \geq \xi_k$ per qualche $k \in \{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n + 1\}$, allora la corrispondente ξ_k soddisferà la disuguaglianza stretta, i.e. $\xi_k > \xi_i$ (vedi Fig. A.3 nel caso $n = m = 2$).

Sia $b^{(m)}$ il polinomio di grado m scritto nella forma modificata (A.2.2) e siano $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ le coordinate baricentriche del punto appartenente alla $(n + 1)$ -esima regione.

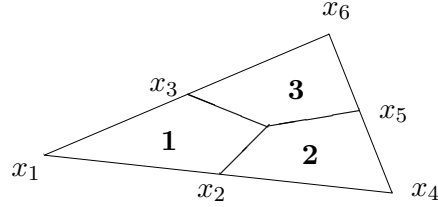


Fig. A.3: Un 2-simplex con la suddivisione in 3 regioni

- 1.** $\xi_1 \geq \xi_2, \xi_1 \geq \xi_3$
- 2.** $\xi_2 > \xi_1, \xi_2 \geq \xi_3$
- 3.** $\xi_3 > \xi_1, \xi_3 > \xi_2$

Algoritmo A.2

Input:

1. Il vettore \mathbf{c} di dimensione $d = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}$

contiene le ordinate di Bezier.

2. Il punto $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ per calcolare il polinomio $b^{(m)}$.

for $j = 1$ to n do

$$s_{j,n+1} = \frac{\xi_j}{\xi_{n+1}}$$

end for;

Definisci i seguenti n vettori

$$\text{ind1} = (2, n+2)$$

$$\text{ind2} = (3, n+3, n+3+m)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \ddots$$

$$\text{indn} = (n+1, 2n+1, \dots, d)$$

$$l_i = 0 \quad i = 1, \dots, n-1; \quad l_n = 1$$

$$A[1] = c_1$$

for $i_1 = 1$ to m do

$$l_1 = l_1 + 1$$

$$A[2] = c_{\text{ind1}(l_1)}$$

for $i_2 = 1$ to i_1 do

$$l_2 := l_2 + 1$$

$$A[3] = c_{\text{ind2}(l_2)}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

for $i_n = 1$ to i_{n-1} do

$$A[n] = A[n] * s_{n,n+1} + c_{\text{indn}(l_n)}$$

```

         $l_n = l_n + 1$ 
    end for
     $A[n - 1] = A[n - 1] * s_{n-1,n+1} + A[n]$ 
end for
     $\vdots$ 
     $\vdots$ 
 $A[1] = A[1] * s_{1,n+1} + A[2]$ 
end for
 $b^{(m)}(x) = A[1] * \xi_{n+1}^m$ 

```

È facile provare che gli n vettori usati nell'algoritmo hanno dimensioni crescenti da 2 a $n + 1$. Essi sono usati come indici per identificare le ordinate di Bézier. La sola cosa richiesta dall'algoritmo è l'individuazione della regione a cui appartiene il punto. Infatti il passo di inizializzazione di questi vettori, dipende dalla regione di appartenenza del punto.

Per ciascuna regione è possibile trovare un opportuno insieme di vettori $ind1, \dots, indn$ le cui componenti dipendono strettamente dal vertice iniziale che delimita la regione in esame.

L'ultimo contatore, l_n , usato dall'algoritmo, consente di determinare il *numero di moltiplicazioni necessarie a determinare il polinomio* con questo algoritmo. Il suo numero, come provato in [57], è un polinomio di grado n nella variabile m , cioè nel grado del polinomio.

Di entrambi gli algoritmi A.1 e A.2 si sono fatte delle implementazioni in MATLAB per il caso bidimensionale, cioè al 2-simplex mostrato in Fig.A.3.

Appendice B

Algoritmi per interpolazione frattale

In questa appendice presentiamo gli algoritmi da noi usati per l'interpolazione di curve e superfici frattali.

B.1 Algoritmo Deterministico e Random

Le due implementazioni che seguono, rispettano quanto descritto nel capitolo 5 alla sezione 2.

ALGORITMO DETERMINISTICO

Algoritmo B.1

1. Leggi i punti di interpolazione (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, il numero massimo di iterazioni max_iter e i fattori verticali di scala d_i , $i = 1, \dots, n$;
2. mediante (7.3.2) e (7.3.3) determina le mappe affini w_i , $i = 1, \dots, n$;
3. scegli l'insieme iniziale A_0 ;
4. Per $k = 1, max_iter$ esegui
 - (i) determina il nuovo insieme A_k come unione delle immagini delle mappe w_i applicate all'insieme A_{k-1} e conserva le coordinate di detti punti in una array "newxy";
 - (ii) disegna A_k .

Un codice in pseudo-Pascal per questa versione deterministica potrebbe essere il seguente.

```

{Scegli l'insieme iniziale  $A_0$ 
da cui far partire le iterazioni.}
nx:= $\lfloor (\max_{0 \leq i \leq n} x_i - \min_{0 \leq i \leq n} x_i) \rfloor + \lfloor \min_{0 \leq i \leq n} x_i \rfloor$ ;
ny:= $\lfloor (\max_{0 \leq i \leq n} y_i - \min_{0 \leq i \leq n} y_i) \rfloor + \lfloor \min_{0 \leq i \leq n} y_i \rfloor$ ;
for i:=1 to nx do
   $x'[i, 1] := 1$ ;
   $x'[nx - i + 1, ny] := 1$ ;
end;
for i:=1 to ny do
   $x'[1, ny - i + 1] := 1$ ;
   $x'[nx, i] := 1$ ;
end;
{Main loop}
for k:=1 to max_iter do
  for i:=1 to nx do
    for j:=1 to ny do
      for l:=1 to N do
        if  $x'[i, j] \neq 0$  then
           $i1 := \lfloor a[l] * i + e[l] \rfloor$ ;
           $j1 := \lfloor c[l] * i + d[l] * j + g[l] \rfloor$ ;
          if  $i1=0$  then  $i1:=1$ ;
          if  $j1=0$  then  $j1:=1$ ;
        end if;
        newxy[i1, j1]=1;
      end;
    end;
  end;
  Plot(newxy); {Routine di draw dei punti che stanno su  $A_k$  }
end;

```

Un esempio di applicazione di questo algoritmo è visualizzato in figura B.1. Si è scelto come A_0 il rettangolo che racchiude i punti

$$(0, 10), (50, 60), (80, 40), (90, 100).$$

I fattori di scala scelti sono stati $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.3$ e $d_3 = 0.4$. Si noti come l'attrattore è una curva frattale interpolante che si riduce alle spezzata passante per i punti se tutti i parametri d_i sono scelti nulli.

Fig. B.1: *Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l'algoritmo deterministico B.1*

ALGORITMO RANDOM

Algoritmo B.2

1. *Leggi i punti di interpolazione (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, il numero massimo di punti da visualizzare max_points e i fattori verticali di scala d_i , $i = 1, \dots, n$;*
2. *mediante (7.3.2) e (7.3.3) determina le mappe affini w_i , $i = 1, \dots, n$;*
3. *scegli un punto iniziale (\bar{x}, \bar{y}) ;*
4. *Per $j = 1, max_points$ esegui*
 - (i) *scegli "a caso" una delle mappe w_i , con $i = \lfloor (n * random - 0.00001) + 1 \rfloor$;*
 - (ii) *determina i nuovi punti che indicheremo con i vettori **newx** e **newy**;*
5. *disegna i punti calcolati al passo 4..*

Un codice Pascal per questa versione random potrebbe essere il seguente.

```
{Scegli il punto (0,0) come punto
iniziale per le iterazioni.}
x:=0;
y:=0;
{Main loop}
for j:=1 to max_points do
begin
    k:=trunc(n*random-0.0001)+1; {Significa che  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ }
    newx:=a[k]*x+e[k];
    newy:=c[k]*x+d[k]*y+g[k];
    x:=newx;
    y:=newy;
    PutPixel(x,y,color=3); {routine per disegnare}
end;
```

L'esempio che presentiamo riguarda l'insieme

$$(0, 0), (20, 30), (25, 20), (30, 10), (50, 5), (70, 2), (80, 15)$$

con diverse scelte dei fattori di scala verticali. Vedi fig. B.2 e B.3.

Fig. B.2: *Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l'algoritmo random B.2*

Fig. B.3: *Curva frattale interpolante ottenuta come attrattore di un i.f.s. mediante l'algoritmo random B.2*

Bibliografia

- [1] P. Alfeld. A bivariate C^2 Clough-Tocher scheme. *CAGD*, 1:257–267, 1984.
- [2] P. Alfeld. A trivariate Clough-Tocher scheme for tetrahedral data. *CAGD*, 1:169–181, 1984.
- [3] M. F. Barnsley. Fractal Functions and Interpolation. *Const. Approx.*, 2:303–329, 1986.
- [4] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc., 1988.
- [5] M. F. Barnsley. Lecture Notes on Iterated Function Systems. In R. L. Devaney and L. Keen, editors, *Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Computer Graphics*, volume 39, pages 127–144. American Mathematical Society, 1989. Conferenza tenutasi in Providence, Rhode Island, 6-7 Agosto, 1988.
- [6] M. F. Barnsley, J. H. Elton, and D. P. Hardin. Recurrent Iterated Function Systems. *Const. Approx.*, 5:3–31, 1989.
- [7] M. F. Barnsley, J. H. Elton, D. P. Hardin, and P. Massopust. Hidden Variable Fractal Interpolation Functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(5):1218–1242, 1989.
- [8] W. Böhm, G. Farin, and J. Kahmann. A survey of curve and surface methods in CAGD. *CAGD*, 1:1–60, 1984.
- [9] C. Brezinski. The Mühlbach-Neville-Aitken Algorithm and some extensions. *BIT*, 20:444–451, 1980.
- [10] C. Brezinski. ALGORITHM 585: A Subroutine for the General Interpolation and Extrapolation Problems. *ACM TOMS*, 8(3):291–301, Settembre 1982.
- [11] C. Brezinski and G. Walz. Sequences of transformations and triangular recursion schemes with applications in numerical analysis. *J. of Comp. and Applied Math.*, 34:361–383, 1991.
- [12] P. L. Butzer. Linear Combinations of Bernstein Polynomials. *Can. J. Math.*, 5:559–567, 1953.

- [13] J. M. Carnicer and W. Dahmen. Convexity preserving interpolation and Powell-Sabin elements. *CAGD*, 9:279–289, 1992.
- [14] G. Z. Chang and P. J. Davis. The convexity of Bernstein polynomials over triangles. *J. App. Theory*, 40:11–28, 1984.
- [15] G. Z. Chang and Y. Y. Feng. An improved condition for the convexity of Bernstein-Bézier surfaces over triangles. *CAGD*, 1:279–283, 1984.
- [16] C. K. Chui. *Multivariate Splines*. Number 54 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1988.
- [17] P. G. Ciarlet and J. L. Lions. *Handbook of Numerical Analysis: Finite Element Methods (Part 1)*, volume II. North-Holland, 1991.
- [18] P. J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications Inc., New York, 1975.
- [19] S. De Marchi. Approssimazione con Splines Multivariate. Master's thesis, Università degli studi di Padova, 1990-91. Tesi di Perfezionamento.
- [20] S. De Marchi. A Short Survey of Fractal Interpolation Curves and Surfaces. Technical Report 2,, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Gennaio, 1994.
- [21] S. De Marchi and M. Morandi Cecchi. The polynomial approximation in the finite element method. **IVth International Symposium on Orthogonal Polynomials and their Application** - Evian (Francia), Ottobre, 1992. In corso di stampa su *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [22] S. De Marchi and M. Morandi Cecchi. Fractal interpolation functions for a class of finite elements. **2nd International Conference on Curves and Surfaces**. Chamonix Mont-Blanc (Francia), 1993. In corso di stampa nei Proceedings.
- [23] S. De Marchi and M. Morandi Cecchi. Reference Functional and Characteristic Space for Lagrange and Bernstein Operators. Ottobre, 1993. Sottomesso a *Approx. Th. and its Appl.*
- [24] S. De Marchi and M. Morandi Cecchi. Unstructured grids of triangles for the solution of systems of hyperbolic equations. Presentato a **3rd SIAM Conference on Geometric Design**. Tempe, Arizona (USA), Novembre, 1993.
- [25] G. Deslauriers, J. Dubois, and S. Dubuc. Multidimensional Iterative Interpolation. *Can. J. Math.*, 47(2):297–312, 1991.
- [26] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric Iterative Interpolation Processes. *Constr. Approx.*, 5:49–68, 1989.

- [27] D. R. Dickinson. On Tchebycheff Polynomials. *Quarterly J. of Math.*, 10:277–282, 1939.
- [28] Z. Ditzian. Inverse Theorems for Multidimensional Bernstein Operators. *Pacific Journal of Mathematics*, 121(2):293–319, 1986.
- [29] A. Doria, F. Angrilli, and S. De Marchi. Inverse kinematics robot calibration by spline functions. *Appl. Math. Modelling*, 17, Settembre, 1993.
- [30] S. Dubuc and F. Nekka. General interpolation schemes for the generation of Irregular surfaces. *Comunicazione Privata*, 1993.
- [31] G. Farin. Triangular Bernstein-Bézier Patches. *CAGD*, 3:83–127, 1986.
- [32] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. Academic Press, third edition, 1993.
- [33] G. E. Fasshauer and L. L. Schumaker. Multi-patch Parametric Surfaces with Minimal Energy. *Comunicazione privata*, 1993.
- [34] Y. Y. Feng. Rates of convergence of Bézier net over triangles. *CAGD*, 4:245–249, 1987.
- [35] M. Gasca. Multivariate Polynomial Interpolation. In M. Gasca W. Dahmen and C. Micchelli, editors, *Computation of Curves and Surfaces*, volume 307 of *NATO ASI serie. Serie C: Mathematical and Physical Sciences*, pages 223–236. Kluwer, Academic Publishers, 1989. Conferenza tenutasi a Puerto della Cruz, Tenerife, Spagna. 10-21 luglio.
- [36] M. Gasca and E. Lebrón. On Aitken-Neville Formulae for Multivariate Interpolation. In E. L. Ortiz, editor, *Numerical Approximation of PDEs*, pages 133–140. Elsevier, Science Publisher B. V. (North-Holland), 1987.
- [37] M. Gasca and J. I. Maeztu. On Lagrange and Hermite Interpolation in \mathbb{R}^k . *Numer. Math.*, 39:1–14, 1982.
- [38] M. Gasca and G. Mühlbach. Multivariate Interpolation: a Survey with Regard to Extrapolation. In C. Brezinski, editor, *Numerical and Applied Mathematics*, IMACS Conference Series, pages 431–436. J. C. Balzer AG, Scientific Publishing Co., 1989.
- [39] M. Gasca and G. Mühlbach. Multivariate polynomial interpolation under projectivities II: Neville-Aitken Formulas. *Numerical Algorithms*, 2:255–278, 1992.
- [40] A. J. George. *Computer Implementations of the Finite Element Method*. PhD thesis, Stanford University, 1971. STAN-CS-71-208.
- [41] J. S. Geronimo and D. Hardin. Fractal Interpolation Surfaces and a Related 2-D Multiresolution Analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 176:561–586, 1993.

- [42] J. E. Hutchinson. Fractals and Self Similarity. *Indiana Univ. J. Math.*, 30(5):713–747, 1981.
- [43] A. Le Méhauté. Interpolation with piecewise polynomials in more than one variable. In J. Mason and M. Cox, editors, *Algorithms for approximation*, number 10 in IMA Conference Series, pages 181–190. Clarendon Press-Oxford, 1987. Conferenza tenutasi a Shrivenham, luglio 1985.
- [44] A. Le Méhauté. A Finite Element Approach to Surface Reconstruction. In M. Gasca W. Dahmen and C. Micchelli, editors, *Computation of Curves and Surfaces*, volume 307 of *NATO ASI serie. Serie C: Mathematical and Physical Sciences*, pages 237–274. Kluwer, Academic Publishers, 1989. Conferenza tenutasi a Puerto della Cruz, Tenerife, Spagna. 10-21 luglio.
- [45] S. H. Lo. A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. *Int. J. Num. Methods Eng.*, 21:1403–1426, 1985.
- [46] G. G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. Chelsea, New York, second edition, 1986.
- [47] P. R. Massopust. Fractal Surfaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 151:275–290, 1990.
- [48] M. Morandi Cecchi and L. Formaggia. A Discretization Method for 2-D Systems of Hyperbolic Equations Using Unstructured Grids of Triangles. In *Proceedings of The 4th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, pages 71–77, 1991. Tokyo - Japan - July 29-31.
- [49] M. Morandi Cecchi and L. Padoan. A Shallow Water Model for a Lagoon by Finite Element Method. VIII Int. Conference on Computational Methods in Water Resources. Venezia 11-15/6/1990.
- [50] G. Mühlbach. The General Neville-Aitken-Algorithm and Some Applications. *Numer. Math.*, 31:97–110, 1978.
- [51] G. Mühlbach and M. Gasca. Multivariate polynomial interpolation under projectivities part I: Lagrange and Newton Interpolation Formulas. *Numerical Algorithms*, 1:375–400, 1991.
- [52] R. A. Nicolaides. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 9(3):435–445, 1972.
- [53] M. J. D. Powell. *Approximation theory and methods*. Cambridge University Press, 1981.
- [54] A. Preusser. ALGORITHM 684. C^1 - and C^2 -Interpolation on Triangles with Quintic and Nonic Bivariate Polynomials. *ACM Tran. Math. Soft.*, 16(3):253–257, Sept. 1990.
- [55] A. Preusser. Efficient Formulation of a Bivariate Nonic C^2 -Hermite Polynomial on Triangles. *ACM Tran. Math. Soft.*, 16(3):246–252, Sept. 1990.

- [56] L. L. Schumaker. *Spline Functions. Basic Theory*. John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [57] L. L. Schumaker. Numerical aspects of spaces of piecewise polynomials on triangulations. In J. Mason and M. Cox, editors, *Algorithms for approximation*, number 10 in IMA Conference Series, pages 373–406. Clarendon Press-Oxford, 1987. Conferenza tenuta a Shrivenham, luglio 1985.
- [58] L. L. Schumaker and W. Volk. Efficient evaluation of multivariate polynomials. *CAGD*, 3:149–154, 1986.
- [59] G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [60] H. C. Jr. Thacher and W. E. Milne. Interpolation in Several Variables. *Journal of SIAM*, 8(1):33–42, 1960.
- [61] G. Walz. On Interpolation by Generalized Planar Splines I: the Polynomial Case. *Computing*, 42:187–194, 1989.
- [62] G. Walz. Generalized Divided Differences, with Applications to Generalized B-Splines. *Calcolo*, pages 111–123, Gennaio-Giugno, 1992.
- [63] R. H. Wang and X. Q. Shi. A Kind of Cubic C^1 -Interpolation in the n -dimensional Finite Element Method. *Journal of Math. Research and Exposition*, 9(2):173–179, 5 1989.
- [64] T. Wang. A C^2 -quintic spline interpolation scheme on triangulation. *CAGD*, 9:379–386, 1992.
- [65] D. F. Watson. Computing the n -dimensional Delauney Tessellation with Applications to Voronoi Polytopes. *Computer Journal*, 24(2):167–172, 1981.
- [66] A. Ženíšek. Interpolation Polynomials on the Triangle. *Num. Math.*, 15:283–296, 1970.
- [67] W. Zhengchang. Linear Combinations of Bernstein Operators on a Simplex. *Approx. Theory and its Appl.*, 7:81–90, 1991.
- [68] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw Hill, 1989.