Algebra 2
Terzo appello 1 luglio 2008

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Nell'anello $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali sia A il sottoinsieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si provi che:

- (a) A e' un sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$ ed e' commutativo;
 - (b) l'insieme $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$ e' il nucleo di un omomorfismo di A in $\mathbb{R}$;
 - (c) N e' un ideale di A ;
 - (d) gli ideali di A sono $\{0\}, N, A$ e non ce ne sono altri.
2. Sia G un gruppo di ordine $13^2 5$.
- (a) Si indichi il numero dei 13-sottogruppi di Sylow di G e dei 5-sottogruppi di Sylow di G .
 - (b) Si provi che G e' abeliano.
 - (c) Il gruppo G e' necessariamente ciclico? In caso negativo, se ne dia un controesempio.
3. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $a = 2(1 - 2i)$ e $b = 5 + i$.
- (a) Dimostrare che l'ideale generato da a e b e' principale.
 - (b) Esibire un generatore d dell'ideale generato da a e b .
 - (c) L'ideale generato da a e b e' massimale?
 - (d) Elencare tutti gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(a)$ evidenziando quelli massimali.

4. Sia $u = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$.
- (a) Si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$ e il grado di u su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Si provi che $\mathbb{Q}(u)$ non e' campo di riducibilita' completa per f su $\mathbb{Q}$.
 - (c) Si scriva $\frac{u}{u^2-4}$ come espressione polinomiale in u a coefficienti in $\mathbb{Q}$.
5. Sia G un gruppo abeliano finito e sia α un endomorfismo di G (ovvero un omomorfismo di G in G) tale che $\alpha \circ \alpha = \alpha$.
- (a) Si provi che $\text{Im}(\alpha) \cap \ker(\alpha) = \{1\}$.
 - (b) Si provi che $|G/\ker(\alpha)| = |\text{Im}(\alpha)|$.
 - (c) Si provi che G e' il prodotto diretto dei sottogruppi $\text{Im}(\alpha)$ e $\ker(\alpha)$.
 - (**) Si provi che (a) e (c) valgono anche nel caso in cui G abbia ordine infinito.