

Algebra 2
Primo appello, 12 dicembre 2006

1. Siano date le permutazioni di S_5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare la decomposizione ciclica di σ e di τ ed il prodotto $\sigma\tau$.
 - (b) L'elemento σ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5 ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (c) L'elemento τ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5 ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (d) Dimostrare che ogni 2-sottogruppo di Sylow di S_5 contiene un sottogruppo ciclico di ordine 4.
 - (e) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ .
 - (f) Dire se $\langle \sigma \rangle = C_{S_5}(\sigma)$, motivando la risposta.
2. Siano dati due anelli unitari R ed S e siano dati due omomorfismi $\phi, \psi: R \rightarrow S$.
- (a) Dimostrare che $J = \{r \in R \mid \phi(r) = \psi(r)\}$ è un sottoanello di R .
 - (b) Dimostrare che se S è un dominio di integrità e $\phi \neq \psi$ sono due omomorfismi non nulli allora J non è un ideale di R .
3. Si consideri $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{3} \in \mathbb{C}$.
- (a) Si dimostri che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Si verifichi che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$.
 - (c) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ motivando la risposta.

CONTINUA

4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia $G = C_8 = \langle g \rangle$ il gruppo ciclico di ordine 8, con generatore g .
- (a) Dimostrare che $g.(a + ib) = -b + ia$ determina un'azione di G su $\mathbb{Z}[i]$.
 - (b) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore degli elementi i e $2 + i$.
 - (c) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di un elemento non nullo $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$.
 - (d) Dimostrare che se π è un primo di Gauss, π ed il suo coniugato $\bar{\pi}$ sono nella stessa G -orbita se e solo se la norma $\nu(\pi)$ è 2 oppure il quadrato di un numero primo.
 - (e) È vero che se $z \in \mathbb{Z}[i]$ allora l'ideale $(g.z)$ coincide con l'ideale (z) ?
5. Sia $F = \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e siano dati i polinomi $f(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$ e $g(X) = X^2 + X + 2 \in F[X]$.
- (a) Determinare la scomposizione in irriducibili di $f(X)$ e di $g(X)$ su F motivando la risposta.
 - (b) Sia $J = (g(X))$. Dire se $f(X) + J$ è invertibile in $F[X]/J$ ed in caso affermativo determinare l'inverso.
 - (c) Determinare l'ordine di $F[X]/J$ e l'ordine del gruppo $U(F[X]/J)$ degli elementi invertibili di $F[X]/J$.
 - (d) Il gruppo $U(F[X]/J)$ è ciclico? Motivare la risposta.
 - (e) Determinare il periodo moltiplicativo di $X + J$ in $U(F[X]/J)$.