

Algebra 2
Appello di recupero, 12 settembre 2007

1. Sia $G = S_5 \times C_2$ il prodotto diretto del gruppo simmetrico S_5 e del gruppo ciclico di ordine 2 di generatore x . Sia dato l'elemento di S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare l'ordine di σ in S_5 e l'ordine dell'elemento $(\sigma, x) \in G$.
 - (b) L'elemento $(\sigma, 1)$ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (c) L'elemento (σ, x) appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (d) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ in S_5 .
 - (e) Determinare il centralizzatore $C_G((\sigma, x))$ di (σ, x) in G e la cardinalità della classe di coniugio di (σ, x) in G .
2. Sia dato l'anello $\mathbb{Z}_2[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e siano I l'ideale generato da $X^3 + 1$ ed $R = \mathbb{Z}_2[X]/I$.
- (a) Si determinino l'ordine e la caratteristica di R e si elenchino i suoi elementi.
 - (b) Si determinino in R i divisori dello zero e gli elementi invertibili con i relativi inversi.
 - (c) Si dimostri che

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_4 &\rightarrow R \\ a &\mapsto \bar{a} + \bar{a}X + \bar{a}X^2 + I, \end{aligned}$$

dove $\bar{a}$ denota la classe di a modulo 2, è un morfismo di anelli.

- (d) Si determinino il nucleo e l'immagine di φ .

CONTINUA

3. Sia G un gruppo di ordine 78.
 - (a) Determinare il numero n_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G .
 - (b) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13} .
 - (c) Contare gli elementi di ordine 13 in G .
4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $\alpha = -2 + 10i$ e $\beta = 9 + 7i$.
 - (a) Determinare il massimo comun divisore di α e β appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.
 - (b) L'ideale I generato da α e β è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I .
 - (c) Sia J l'ideale generato da α e sia $\gamma = -1 + 2i$. Dire se $\gamma + J$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.
5. In $\mathbb{C}$ si consideri l'elemento $u = \sqrt{2 + \sqrt{6}}$.
 - (a) Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e si determini il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Si dimostri che $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(u)$ e si determini il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
 - (c) Si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
 - (d) Si dica, motivando la risposta, se u è costruibile con riga e compasso.