Algebra 2
Quarto appello 15 settembre 2008

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. (a) Si trovino gli zeri complessi del polinomio $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ e si dimostri che tale polinomio e' irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Detta α una radice di $f(x)$, si scriva α^{-1} come combinazione lineare in $\mathbb{Q}$ di $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ dove n e' il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.
   (c) $\mathbb{Q}(\alpha)$ e' campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$?

2. Sia G un gruppo finito ed H e K sottogruppi di G. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false fornendo una breve dimostrazione o un controesempio.
   (a) Se $|G : H| = p$ con p primo, allora H e' massimale in G.
   (b) Se $|G : H| = p$ con p primo, allora H e' normale in G.
   (c) Se $|G : H| = 3$ e $|G|$ e' dispari, allora H e' normale in G.

3. Sia G un gruppo di ordine p^2q^2 dove p e q sono primi distinti tali che $p^2 \not\equiv 1$ mod q e $q^2 \not\equiv 1$ mod p.
   (a) Si indichi il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G e dei q-sottogruppi di Sylow di G.
   (b) Si provi che G é abeliano.
   (c) Il gruppo G e' necessariamente ciclico? In caso negativo, se ne dia un controesempio.

4. Nell'anello $M_2(\mathbb{Q})$ delle matrici 2×2 a coefficienti razionali sia A il sottoinsieme
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$
Si provi che:
   (a) A e' un sottoanello di $M_2(\mathbb{Q})$ e che non e' commutativo esibendo due elementi che non comutano tra loro;
   (b) l'insieme $H = \{x \in A \mid x^2 = 0\}$ e' un ideale bilatero di A;
   (c) l'anello quoziente A/H e' isomorfo a $\mathbb{Q}$.

5. Sia $K = \mathbb{F}_3$ il campo con 3 elementi. Dato il polinomio $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$ in $K[x]$, si consideri l'ideale $I = (f(x))$ da esso generato e l'anello quoziente $A = K[x]/I$.
   (a) Provere che A non e' un dominio.
   (b) Calcolare l'ordine di A.
   (c) Provare che l'elemento $(x^2 + 1) + I$ di A e' invertibile.
   (d) Elencare tutti gli ideali di A.
   (e) Il campo $\mathbb{F}_9$ con 9 elementi e' un quoziente di A?
   (f) Trovare gli elementi nilpotenti di A.