

Algebra 2
Primo appello, 17 dicembre 2007
FILA A

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1.
 - (a) Si provi che un gruppo di ordine 91 è ciclico.
 - (b) Sia G un gruppo e $K \leq G$; si dimostri che il numero di coniugati di K in G è pari all'indice del normalizzatore di K in G .
 - (c) Si provi che un gruppo di ordine 616 ($= 8 \cdot 7 \cdot 11$) non è semplice.
2. Sia S_n il gruppo simmetrico di grado n .
 - (a) Si provi che $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ è un sottogruppo di S_n isomorfo a S_{n-1} .
 - (b) Sia $\nu \in S_n$: si descrivano gli elementi di $\nu H \nu^{-1}$.
 - (c) È vero che $\bigcap_{\nu \in S_n} \nu H \nu^{-1} = 1_{S_n}$?
3. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.
 - (a) Si provi che l'anello $\mathbb{Z}[i]/(17)$ ha divisori dello zero.
 - (b) Si determinino gli ideali di $\mathbb{Z}[i]/(17)$.
 - (c) Calcolare $|\mathbb{Z}[i]/(17)|$ e $|U(\mathbb{Z}[i]/(17))|$.
4. Sia ξ una radice primitiva sesta di 1 in $\mathbb{C}$.
 - (a) Determinare il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt{3}\xi)$.
 - (c) Determinare il polinomio minimo $p(x)$ di $\sqrt{3}\xi$ su $\mathbb{Q}$.
 - (d) Dire se $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\xi)$ è campo di spezzamento per $p(x)$ su $\mathbb{Q}$.

5. In $R = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$ consideriamo il polinomio $f(x) = x^2 + x - 4$ e l'ideale da esso generato $J = (f(x))$.
- (a) Sia $g(x) = x^3 - 4x + 2$: l'ideale generato da $f(x)$ e $g(x)$ è principale? In caso affermativo esibire un generatore.
 - (b) L'elemento $g(x) + J$ è invertibile nell'anello quoziente R/J ? In caso affermativo trovare l'inverso.
 - (c) Calcolare l'ordine dell'anello R/J .
 - (d) Esiste un campo strettamente compreso tra $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e R/J ?
 - (e) Il gruppo degli elementi invertibili $U(R/J)$ è ciclico? In caso affermativo, quanti generatori ci sono?