

Algebra 2
Appello di recupero estivo, 2 luglio 2007

1. Sia $G = S_5 \times C_3$ il prodotto diretto del gruppo simmetrico S_5 e del gruppo ciclico di ordine 2 di generatore g . Sia dato l'elemento di S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare l'ordine di σ in S_5 e l'ordine dell'elemento $(\sigma, g) \in G$.
 - (b) L'elemento $(\sigma, 1)$ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ?
In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (c) L'elemento (σ, g) appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ?
In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - (d) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ in S_5 .
 - (e) Determinare il centralizzatore $C_G((\sigma, g))$ di (σ, g) in G e la cardinalità della classe di coniugio di (σ, g) in G .
2. Sia dato l'anello $\mathbb{Z}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e sia dato il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$:

$$J = \{p(X) = \sum_{i=0}^n p_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \mid p_i \equiv 0 \pmod{7}\}$$

- (a) Dimostrare che J è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
- (b) Dimostrare che $\mathbb{Z}[X]/J \cong \mathbb{Z}_7[X]$.
- (c) L'ideale J è un ideale primo di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.
- (d) L'ideale J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.
- (e) L'elemento $q(X) = X + 1$ di $\mathbb{Z}[X]$ è un divisore dello zero in $\mathbb{Z}[X]$?
Motivare la risposta.
- (f) L'elemento $q(X) = X + 1$ di $\mathbb{Z}[X]$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.

CONTINUA

3. Sia G un gruppo di ordine 39.
 - (a) Determinare il numero n_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G .
 - (b) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13} ed un sottogruppo K isomorfo a C_3 .
 - (c) Dimostrare che $G = HK$ e che $H \cap K = 1$.
4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $\alpha = -1+5i$ e $\beta = 9+7i$.
 - (a) Determinare il massimo comun divisore di α e β appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.
 - (b) L'ideale I generato da α e β è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I .
 - (c) Sia J l'ideale generato da α e sia $\gamma = -1+2i$. Dire se $\gamma + J$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.
5. Sia $F = \mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e siano dati i polinomi $a(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$ e $b(X) = X^2 + X + 2 \in F[X]$.
 - (a) Determinare la scomposizione in irriducibili di $a(X)$ e di $b(X)$ su F motivando la risposta.
 - (b) Sia $I = (b(X))$. Dire, motivando la risposta, se $a(X) + I$ è invertibile in $F[X]/I$ ed in caso affermativo determinare l'inverso.
 - (c) Dire, motivando la risposta, se $2X + 1 + I + I$ è invertibile in $F[X]/I$ ed in caso affermativo determinare l'inverso.