Algebra 2
Prima prova parziale, 30 ottobre 2006
FILA A

1. Siano date le permutazioni di S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare la decomposizione ciclica di σ e di τ e dire se σ e τ sono coniugate, motivando la risposta.

   (b) Calcolare $\sigma\tau$, σ^{-1} e $|\sigma|$.

   (c) Determinare il centralizzatore $C_{S_7}(\sigma)$ di σ in S_7 e la cardinalità della classe di coniugio di σ.

   (d) Dire se $\langle\sigma\rangle = C_{S_7}(\sigma)$, motivando la risposta.

2. Siano dati due gruppi G ed H, un gruppo abeliano A e siano dati due omomorfismi

$$\varphi\colon G \to A, \quad \psi\colon H \to A.$$

   (a) Verificare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi\colon G \times H &\to A \\ (g, h) &\mapsto \varphi(g)\psi(h) \end{aligned}$$

   è un omomorfismo.

   (b) Verificare che

$$G \times_A H := \{(g, h) \in G \times H \mid \varphi(g) = \psi(h)\}$$

   è un sottogruppo normale di $G \times H$.

   (c) Dimostrare che se G ed H sono finiti e di ordine coprimo allora $Ker(\Phi) = Ker(\varphi) \times Ker(\psi)$. (Suggerimento: considerare $|\varphi(g)|$ e $|\psi(h)|$).

CONTINUA

3. Siano p e q due numeri primi distinti con $q < p$, sia m un intero positivo e sia G un gruppo di ordine qp^m.

   (a) Determinare il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G e dimostrare che G possiede un p-sottogruppo di Sylow normale P.

   (b) Dimostrare che un qualsiasi q-sottogruppo di Sylow di G è ciclico.

   Sia Q un qualsiasi q-sottogruppo di Sylow di G.

   (c) Dimostrare che $PQ \leq G$.

   (d) Calcolare $|PQ|$ e verificare che $G = PQ$.

4. Sia Q il seguente sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   (detto gruppo dei quaternioni). Si consideri l'azione standard del gruppo Q su $\mathbb{C}^2$ determinata dal prodotto righe per colonne.

   (a) Determinare le orbite di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed i rispettivi stabilizzatori.

   (b) Determinare il nucleo dell'azione.

   (c) Determinare l'insieme dei punti fissi di $\mathbb{C}^2$ per l'azione di Q.