

Algebra 2
Prima prova parziale, 30 ottobre 2006
FILA B

1. Sia Q il seguente sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(detto gruppo dei quaternioni). Si consideri l'azione standard del gruppo Q su \mathbb{C}^2 determinata dal prodotto righe per colonne.

- (a) Determinare le orbite di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i rispettivi stabilizzatori.
- (b) Determinare il nucleo dell'azione.
- (c) Determinare l'insieme dei punti fissi di \mathbb{C}^2 per l'azione di Q .

2. Siano date le permutazioni di S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare la decomposizione ciclica di σ e di τ e dire se σ e τ sono coniugate, motivando la risposta.
- (b) Calcolare $\sigma\tau$, σ^{-1} e $|\sigma|$.
- (c) Determinare il centralizzatore $C_{S_7}(\sigma)$ di σ in S_7 e la cardinalità della classe di coniugio di σ .
- (d) Dire se $\langle \sigma \rangle = C_{S_7}(\sigma)$, motivando la risposta.

CONTINUA

3. Siano dati due gruppi G ed G' , un gruppo abeliano A e siano dati due omomorfismi

$$f: G \rightarrow A, \quad f': G' \rightarrow A.$$

- (a) Verificare che l'applicazione

$$\begin{aligned} F: G \times G' &\rightarrow A \\ (g, h) &\mapsto f(g)f'(h) \end{aligned}$$

è un omomorfismo.

- (b) Verificare che

$$G \times_A G' := \{(g, g') \in G \times G' \mid f(g) = f'(g')\}$$

è un sottogruppo normale di $G \times G'$.

- (c) Dimostrare che se G ed G' sono finiti e di ordine coprimo allora $\text{Ker}(F) = \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f')$. (Suggerimento: considerare $|f(g)|$ e $|f'(g')|$).
4. Siano p e q due numeri primi distinti con $q > p$, sia m un intero positivo e sia G un gruppo di ordine pq^m .
- (a) Determinare il numero dei q -sottogruppi di Sylow di G e dimostrare che G possiede un q -sottogruppo di Sylow normale Q .
- (b) Dimostrare che un qualsiasi p -sottogruppo di Sylow di G è ciclico.

Sia P un qualsiasi p -sottogruppo di Sylow di G .

- (c) Dimostrare che $PQ \leq G$.
- (d) Calcolare $|PQ|$ e verificare che $G = PQ$.