

Algebra 2
Prima prova parziale, 31 ottobre 2007
FILA A

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Data la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) calcolare l'ordine di σ ;
 - (b) calcolare σ^{-1} ; verificare che σ e σ^{-1} sono coniugate tra loro trovando un elemento τ che le coniuga.
 - (c) Dimostrare che nel gruppo delle permutazioni S_n ogni elemento è coniugato al suo inverso.
2. Sia H un sottogruppo di un gruppo G . Definiamo l'insieme $C(H)$ come

$$C(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ per ogni } h \in H\}.$$

- (a) Si dimostri che $C(H)$ è un sottogruppo di G .
 - (b) Se H è un sottogruppo normale di G si dimostri che $C(H)$ è un sottogruppo normale di G .
3. Sia R l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Definiamo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 8b \\ 5b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \right\}.$$

- (a) Si provi che A è sottoanello di R . È anche ideale?
 - (b) Determinare la caratteristica di A .
 - (c) A è un dominio d'integrità?
4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = 5i$.
- (a) Determinare il massimo comun divisore di z_1 e z_2 appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.

- (b) L'ideale I generato da z_1 e z_2 è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I .
 - (c) Sia J l'ideale generato da z_1 . Si dica se $z_2 + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.
 - (d) Si dica se $z_2 + J$ è un divisore dello zero in $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determine un elemento $c + J \neq J$ tale che $(z_2 + J)(c + J) = J$.
 - (e) Si scrivano tutti gli ideali non banali di $\mathbb{Z}[i]/J$. Quali di questi sono massimali?
5. In $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ consideriamo il polinomio $a(x) = x^3 - 2x + 1$ e l'ideale da esso generato $J = (a(x))$.
- (a) Calcolare l'ordine dell'anello R/J .
 - (b) L'elemento $(x - 1) + J$ è invertibile nell'anello quoziente R/J ?
 - (c) L'ideale J è massimale in R ? Si dimostri che esiste un ideale M , contenente J , tale che R/M è campo con 9 elementi.
 - (d) Calcolare l'ordine del gruppo $U(R/J)$ degli elementi invertibili di R/J .
- * Si provi che il gruppo $U(R/J)$ non è ciclico.