Algebra 2
Prima prova parziale, 31 ottobre 2007
FILA B

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Data la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) calcolare l'ordine di σ;

   (b) calcolare σ^{-1}; verificare che σ e σ^{-1} sono coniugate tra loro trovando un elemento τ che le coniuga.

   (c) Dimostrare che nel gruppo delle permutazioni S_n ogni elemento è coniugato al suo inverso.

2. Sia H un sottogruppo di un gruppo G. Definiamo l'insieme $C(H)$ come

$$C(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ per ogni } h \in H\}.$$

   (a) Si dimostri che $C(H)$ e' un sottogruppo di G.

   (b) Se H e' un sottogruppo normale di G si dimostri che $C(H)$ e' un sottogruppo normale di G.

3. Sia R l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Definiamo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \right\}.$$

   (a) Sia provi che A e' sottoanello di R. E' anche ideale?

   (b) Determinare la caratteristica di A.

   (c) A e' un dominio d'integrita'?

4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $z_1 = 3 - i$ e $z_2 = -5i$.

   (a) Determinare il massimo comun divisore di z_1 e z_2 appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.

(b) L'ideale I generato da z_1 e z_2 è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I.

(c) Sia J l'ideale generato da z_1. Si dica se $z_2 + J$ e' invertibile nell'anello $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.

(d) Si dica se $z_2 + J$ e' un divisore dello zero in $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determine un elemento $c + J \neq J$ tale che $(z_2 + J)(c + J) = J$.

(e) Si scrivano tutti gli ideali non banali di $\mathbb{Z}[i]/J$. Quali di questi sono massimali?

5. In $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ consideriamo il polinomio $a(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ e l'ideale da esso generato $J = (a(x))$.

   (a) Calcolare l'ordine dell'anello R/J.

   (b) L'elemento $(x + 1) + J$ e' invertibile nell'anello quoziente R/J?

   (c) L'ideale J e' massimale in R? Si dimostri che esiste un ideale M, contenente J, tale che R/M è campo con 9 elementi.

   (d) Calcolare l'ordine del gruppo $U(R/J)$ degli elementi invertibili di R/J.

   * Si provi che il gruppo $U(R/J)$ non è ciclico.