Algebra 2
Seconda prova parziale, 4 dicembre 2006

1. Sia $F = \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sia $f(x) = X^3 + 3X^2 + 1 \in F[X]$ e sia $I = (f(X))$.
   (a) Scomporre $f(X)$ in irriducibili in $F[X]$.
   (b) Dire, motivando la risposta, se $F[X]/I$ è un campo.
   (c) Dire se $X + 4 + I$ è un divisore dello zero in $F[X]/I$. In caso affermativo, trovare un elemento non nullo di $F[X]/I$ che moltiplicato per $X + 4 + I$ dia la classe nulla in $F[X]/I$.
   (d) Dire se $3X + 1 + I$ è invertibile in $F[X]/I$. In caso affermativo, determinare l'inverso.
   (e) Dire se $X + 1 + I$ è invertibile in $F[X]/I$. In caso affermativo, determinare l'inverso.

2. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia data l'applicazione
$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Z}[i] &\to \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \\ a + ib &\mapsto a + 5b + 13\mathbb{Z} \end{aligned}$$
   (a) Dimostrare che F è un omomorfismo di anelli.
   (b) Dire se F è suriettivo.
   (c) Dire, motivando la risposta, se $\mathrm{Ker}(F)$ è un ideale massimale.
   (d) Determinare un generatore del nucleo $\mathrm{Ker}(F)$ di F;
   (e) * Dimostrare che se $p \in \mathbb{Z}$ è un numero primo con $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ esistono esattamente due distinti omomorfismi di anelli $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

CONTINUA

3. Sia $M_3(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, e siano dati i seguenti sottoinsiemi di $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

   (a) Dimostrare che S è un sottoanello unitario di $M_3(\mathbb{R})$.

   (b) Dimostrare che J è un ideale bilatero di S.

   (c) Dimostrare che J non è né un ideale destro né un ideale sinistro di $M_3(\mathbb{R})$.

4. Sia dato $\alpha = \sqrt{7} + i \in \mathbb{C}$.

   (a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$.

   (c) Determinare il polinomio minimo $m(x)$ di α su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.

   (d) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è il campo di spezzamento E per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.

   (e) Determinare il grado di E su $\mathbb{Q}$.