Algebra 2
Secondo appello 8 gennaio 2008
FILA A

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. (a) Si provi che l'insieme $J = \{5a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ è un ideale dell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}[x]$.
- (b) Si verifichi che J non è ideale principale. L'anello $\mathbb{Z}[x]$ è un dominio d'integrità euclideo?
- (c) J è ideale massimale?
- (d) Si provi che l'ideale (x) è primo ma non massimale in $\mathbb{Z}[x]$.
- (e) Si provi che l'ideale (y) è primo ma non massimale in $\mathbb{Q}[x, y]$.

2. Sia $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ il campo con 5 elementi e sia G il sottogruppo di $GL_2(F)$ generato dalle matrici $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si provi che:

- (a) $G \leq T$ dove T è il sottogruppo di $GL_2(F)$ generato dalle matrici triangolari inferiori e G non è abeliano;
 - (b) l'applicazione che manda $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \in G$ in $(\alpha, \beta) \in F^* \times F^*$ è un omomorfismo;
 - (c) il sottogruppo H formato dagli elementi di G con 1 sulla diagonale principale è normale in G ed è abeliano.
 - (d) Determinare l'ordine di G .
3. Sia G un gruppo di ordine 39.
 - (a) Si provi che se G è abeliano allora G è ciclico.
 - (b) Se G non è abeliano si indichi per ogni primo p il numero dei p -sottogruppi di Sylow di G .
 - (c) Se G non è abeliano si contino gli elementi di G di ordine 3, 13 e 39.
 - (*) Se G non è abeliano si scriva l'equazione delle classi di G .

4. Sia $u = \sqrt{3 - \sqrt{3}}$.
- (a) Provare che u é algebrico su $\mathbb{Q}$.
 - (b) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$ e il grado di u su $\mathbb{Q}$.
 - (c) Scrivere $\frac{1}{u^2}$ come combinazione lineare di $1, u, u^2, \dots$.
 - (d) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ é campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
5. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $z_1 = -4 + 2i$ e $z_2 = 3 - 4i$.
- (a) Determinare il massimo comun divisore di z_1 e z_2 appartenente al secondo quadrante del piano di Gauss.
 - (b) Si dica, motivando la risposta, se l'ideale I generato da z_1 e z_2 é principale. In caso affermativo determinare un generatore.
 - (c) Sia J l'ideale generato da z_1 ; verificare che l'elemento $z_2 + J$ è un divisore dello zero nell'anello quoziente R/J .
 - (d) Si descriva una relazione tra gli ideali contenenti J e i divisori di z_1 .
 - (e) Scrivere tutti gli ideali di R/J evidenziando quelli massimali.