Algebra 2
Appello di recupero estivo, 2 luglio 2007

1. Sia $G = S_5 \times C_3$ il prodotto diretto del gruppo simmetrico S_5 e del gruppo ciclico di ordine 2 di generatore g. Sia dato l'elemento di S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare l'ordine di σ in S_5 e l'ordine dell'elemento $(\sigma, g) \in G$.

   (b) L'elemento $(\sigma, 1)$ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.

   (c) L'elemento (σ, g) appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.

   (d) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ in S_5.

   (e) Determinare il centralizzatore $C_G((\sigma, g))$ di (σ, g) in G e la cardinalità della classe di coniugio di (σ, g) in G.

2. Sia dato l'anello $\mathbb{Z}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e sia dato il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$:

$$J = \{p(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \mid p_i \equiv 0 \bmod 7\}$$

   (a) Dimostrare che J è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{Z}[X]/J \cong \mathbb{Z}_7[X]$.

   (c) L'ideale J è un ideale primo di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.

   (d) L'ideale J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.

   (e) L'elemento $q(X) = X + 1$ di $\mathbb{Z}[X]$ è un divisore dello zero in $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.

   (f) L'elemento $q(X) = X + 1$ di $\mathbb{Z}[X]$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[X]$? Motivare la risposta.

CONTINUA

3. Sia G un gruppo di ordine 39.

   (a) Determinare il numero n_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G.

   (b) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13} ed un sottogruppo K isomorfo a C_3.

   (c) Dimostrare che $G = HK$ e che $H \cap K = 1$

   (d) Dimostrare che $G \cong C_3 \times C_{13}$.

4. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $\alpha = -1+5i$ e $\beta = 9 + 7i$.

   (a) Determinare il massimo comun divisore di α e β appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.

   (b) L'ideale I generato da α e β è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I.

   (c) Sia J l'ideale generato da α e sia $\gamma = -1 + 2i$. Dire se $\gamma + J$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.

5. Sia $F = \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e siano dati i polinomi $a(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$ e $b(X) = X^2 + X + 2 \in F[X]$.

   (a) Determinare la scomposizione in irriducibili di $a(X)$ e di $b(X)$ su F motivando la risposta.

   (b) Sia $I = (b(X))$. Determinare l'ordine di $F[X]/I$ e l'ordine del gruppo $U(F[X]/I)$ degli elementi invertibili di $F[X]/I$.

   (c) Il gruppo $U(F[X]/I)$ è ciclico? Motivare la risposta.

   (d) L'elemento $X + I$ di $U(F[X]/I)$ è un generatore di $U(F[X]/I)$? Motivare la risposta.