Algebra 2
Seconda prova parziale, 4 dicembre 2007
FILA B

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. (a) Determinare il centralizzante in S_6 della permutazione $\sigma = (1, 2, 3, 5, 6)$;
   (b) Quante classi di coniugio di elementi di ordine 5 ci sono in A_6? Per ognuna di queste se ne dia un rappresentante e se ne calcoli l'ordine.
   (c) Si verifichi che $C_{S_6}((1, 2, 4)) \not\leq A_6$ e se ne deduca che i 3-cicli formano un unica classe di coniugio in A_6.

2. Sia $GL_2(\mathbb{Q})$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 a coefficienti nel campo razionale $\mathbb{Q}$ e sia G il sottogruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid ad \neq 0,\ a, b, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

   (a) Si provi che il sottogruppo

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$$

   è normale in G.
   (b) Si provi che il sottogruppo

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid ad \neq 0\ a, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

   è isomorfo a $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ dove $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
   (c) Si provi che $N \cap K = \{1\}$ e $G = NK$ ma G non è il prodotto diretto di N e K.

3. Sia dato $u = \sqrt{3} - i\sqrt{2} \in \mathbb{C}$.
   (a) Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
   (b) Dimostrare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i\sqrt{2})$.

(c) Determinare il polinomio minimo $m(x)$ di u su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.

(d) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(e) Scrivere $(1-u)^{-1}$ come combinazione lineare di $1, u, u^2, \ldots$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

4. Supponiamo G sia un gruppo SEMPLICE di ordine 168. Contare i 7-Sylow di G e gli elementi di ordine 7 di G.

5. Si consideri il polinomio $f(x) = x^3 + 5$ a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

   (a) Si provi che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_7[x]$.

   (b) Si costruisca un campo della forma $\mathbb{F}_7(a)$ con a zero di $f(x)$.

   (c) Si determini $|\mathbb{F}_7(a)|$.

   (d) Dire se $f(x)$ divide in $\mathbb{F}_7[x]$ il polinomio $x^{7^{15}} - x$.