Seconda prova di accertamento di ALGEBRA 2 - 3 dicembre 2009

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo e $X = \{ xH \mid x \in G \}$ l'insieme delle classi laterali sinistre di H in G. Per ogni $g \in G$ si ponga $T_g(xH) = gxH$.

(a) Si dimostri che con questa posizione si dà una buona definizione di un'applicazione $T_g \colon X \to X$.

(b) Si dimostri che T_g è una biiezione, ossia un'elemento del gruppo simmetrico $\mathcal{S}(X)$.

(c) L'applicazione $\Psi \colon G \to \mathcal{S}(X)$ definita da $\Psi(g) = T_g$ per ogni $g \in G$ è un omomorfismo di gruppi. (Questo lo sia dia per noto, non è da dimostrare.) Si provi che il suo nucleo è il più grande sottogruppo normale di G contenuto in H.

Esercizio 2. Si completi la seguente definizione. Un gruppo G si dice *risolubile* se...

Esercizio 3. Sia G un gruppo abeliano di ordine 30. Si dimostri che G è prodotto diretto di tre gruppi semplici. (Si ricordi che un gruppo G si dice *semplice* se $G \neq \{1_G\}$ e i suoi soli sottogruppi normali sono G e $\{1_G\}$.)

Esercizio 4. Sia F un'estensione del campo K e siano α, β elementi di F. Si supponga che α sia trascendente su K e che α sia algebrico su $K(\beta)$. Si dimostri che β è trascendente su K.

Esercizio 5. Sia $u = \sqrt{2} + i$.

(a) Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.

(b) Si dimostri che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(u)$ e si dica se $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(u)$.

(c) Si calcoli il grado $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ e il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.

(d) Si scriva $1/u$ come combinazione lineare a coefficienti razionali di potenze a esponente intero non-negativo di u.

Esercizio 6. (Per coloro che devono registrare un credito in più.)
Sia $R = 2\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri pari.

(a) Si dica quali sono gli elementi dell'ideale (4) di R generato dall'elemento 4 di R.

(b) Si dica quanti e quali sono gli elementi dell'anello quoziente $R/(4)$.

(c) Un anello A si dice banale se $ab = 0$ per ogni $a, b \in A$. L'anello $R/(4)$ è banale?