

## Prima prova di accertamento di ALGEBRA 2 - 6 novembre 2009

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

**Esercizio 1.** Sia  $f: G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi.

(a) Si dimostri che se  $H$  è un sottogruppo di  $G$ , allora

$$f^{-1}(f(H)) = H \cdot \ker f.$$

[Suggerimento: Si verifichi la doppia inclusione.]

(b) Si dimostri che se  $H'$  è un sottogruppo di  $G'$ , allora

$$f(f^{-1}(H')) = H' \cap f(G).$$

**Esercizio 2.** Si calcoli quanti sono gli elementi di ordine 4 in  $A_5$ .

**Esercizio 3.** Sia  $H$  un sottogruppo di un gruppo  $G$ . Si dimostri che l'insieme  $\{gH \mid g \in G\}$  delle classi laterali sinistre di  $G$  modulo  $H$  e l'insieme  $\{Hg \mid g \in G\}$  delle classi laterali destre di  $G$  modulo  $H$  sono equipotenti.

**Esercizio 4.** (a) Si determini quanti sono i coniugati di  $\sigma = (123)(45678)$  in  $S_8$ .

(b) Si determini il centralizzante di  $\sigma$  in  $S_8$ .

(c) La classe di coniugio di  $\sigma$  in  $A_8$  coincide con la classe di coniugio di  $\sigma$  in  $S_8$ ? Quanti elementi ha?

**Esercizio 5.** Sia  $G$  un gruppo di ordine 231.

(a) Si determini quanti sono gli 11-sottogruppi di Sylow di  $G$ .

(b) Si provi che tali sottogruppi sono normali in  $G$ .

(c) Si determini quanti sono gli elementi di  $G$  di ordine 11.