Esame di ALGEBRA 2 - 7 gennaio 2010

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Sia φ un omomorfismo dal gruppo G al gruppo G'.
(a) Si provi che $\ker\varphi$ è un sottogruppo di G.
(b) Si provi che $\ker\varphi$ è normale in G.
(c) Si provi che $G/\ker\varphi$ è isomorfo a $\varphi(G)$.

Esercizio 2. Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo normale.
(a) Per ogni $g \in G$ si consideri la mappa T_g da H in H definita ponendo $T_g(x) = gxg^{-1}$. Si dimostri che T_g è un automorfismo di H.
(b) Si provi che la posizione $\psi(g) = T_g$ definisce un omomorfismo da G in $Aut(H)$.
(c) Si provi che $G/C_G(H)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $Aut(H)$ (si ricorda che $C_G(H) = \{g \in G \mid hg = gh$ per ogni $h \in H\})$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo di ordine $11^2 \cdot 13^2$.
(a) Si determini il numero di p-sottogruppi di Sylow di G per ogni primo p.
(b) Si provi che G è prodotto diretto di due sottogruppi non banali.
(c) Si dica se G è abeliano (dimostrazione o controesempio).
(d) Si dica se G è ciclico (dimostrazione o controesempio).

Esercizio 4. Sia $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Sia ε una radice di $f(x)$. Si determini il grado e una base dell'estensione di $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ su $\mathbb{Q}$.
(b) Sia ξ una radice primitiva quinta di 1. Si determini il grado di $\mathbb{Q}(\xi)$ su $\mathbb{Q}$.
(c) Si provi che il campo di riducibilità completa F di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\varepsilon, \xi)$.
(d) Si determini il grado $[F : \mathbb{Q}]$.
(e) Si provi che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}(\xi)$.

Esercizio 5. Sia $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
(a) Sia α una radice di $f(x)$. Si elenchino gli elementi dell'estensione $\mathbb{Z}_3(\alpha)$.
(b) Si trovi, se esiste, un generatore del gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_3(\alpha)$.

Esercizio 6. (Per coloro che devono registrare un credito in più.)
(a) Si dia la definizione di dominio a ideali primcipali.
(b) Sia R un dominio a ideali principali e $J = (a)$ un suo ideale, dove $a \in R$. Dato $x \in R$, si provi che l'elemento $x + J$ è invertibile nell'anello quoziente R/J se e solo se $\mathrm{MCD}(x, a) = 1$.