Esame di ALGEBRA 2 - 14 dicembre 2009

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Siano G un gruppo e $G \times G$ il prodotto diretto di due copie di G. Si consideri l'insieme

$$\Delta(G) = \{ (g, g) \mid g \in G \}.$$

(a) Si dimostri che $\Delta(G)$ è sottogruppo di $G \times G$.
(b) Si dimostri che il gruppo $\Delta(G)$ è isomorfo a G.
(c) Si dimostri che $\Delta(G)$ è sottogruppo normale di $G \times G$ se e solo se G è abeliano.

Esercizio 2. Siano G un gruppo e H un suo sottogruppo.
(a) Si dimostri che l'insieme delle classi laterali sinistre di H in G è una partizione di G.
(b) Si dimostri che ogni classe laterale sinistra di H è equipotente ad H.
(c) Si enunci il teorema di Lagrange.
(d) Si dimostri il teorema di Lagrange.

Esercizio 3. Siano A, B gruppi finiti e p un numero primo.
(a) Si dimostri che i p-sottogruppi di Sylow del prodotto diretto $A \times B$ sono tutti e soli della forma $P \times Q$, dove P è un p-sottogruppo di Sylow di A e Q è un p-sottogruppo di Sylow di B.
(b) Si denoti con $n_p(G)$ il numero di p-sottogruppi di Sylow di un gruppo G. Si dimostri che $n_p(A \times B) = n_p(A)n_p(B)$.

Esercizio 4. Si dia un esempio di due gruppi abeliani di ordine 12 non isomorfi.

Esercizio 5. Sia $f = x^6 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Si fattorizzi f come prodotto di polinomi irriducibili nell'anello $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Sia F il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$. Si determini il grado di $[F : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 6. (Per coloro che devono registrare un credito in più.)
(a) Si dimostri che $1 + i$ è un elemento irriducibile dell'anello $\mathbb{Z}[i]$.
(b) Si dimostri che $1 + i$ divide 2 in $\mathbb{Z}[i]$.
(c) Si dica se l'ideale I di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $1 + i$ e 2 è principale, e, in caso affermativo, si determini un generatore dell'ideale I.