Esame di ALGEBRA 2 - 1 luglio 2010

Si risponda ai seguenti quesiti, giustificando la risposta.

Esercizio 1. Sia G il gruppo di tutte le matrici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ e $ac = 1_{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}$. Si definisca la funzione $\varphi\colon G \to U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ ponendo $\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = a$.

(a) Si verifichi che φ è un omomorfismo di gruppi.
(b) Si determinino il nucleo e l'immagine di φ. Che ordine hanno?
(c) Si verifichi che $\ker(\varphi)$ è ciclico, mentre $\varphi(G)$ non lo è.

Esercizio 2. Siano M ed N sottogruppi normali di un gruppo G. Si dimostri che:

(a) $M \cap N$ è un sottogruppo normale di G.
(b) $MN := \{\, ab \mid a \in M,\ b \in N \,\}$ è un sottogruppo ed è normale in G.
(c) Se $G/(M \cap N)$ è un gruppo abeliano, allora anche i gruppi G/M e G/N sono abeliani.

Esercizio 3. Siano $2 \leq r \leq n$ interi. Si dica quanti elementi del gruppo simmetrico S_n sono cicli di lunghezza r, giustificando la risposta.

Esercizio 4. Sia G un gruppo finito e $\psi\colon G \to H$ un omomorfismo suriettivo di gruppi. Si provi che se P è un p-sottogruppo di Sylow in G, allora $\psi(P)$ è un p-sottogruppo di Sylow in H.

Esercizio 5. Si consideri il numero reale $\gamma := \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

(a) Si dimostri che γ è algebrico su $\mathbb{Q}$.
(b) Si dimostri che $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
(c) Si determini il grado $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$ dell'estensione.
(d) Si determini il polinomio minimo di γ su $\mathbb{Q}$, giustificando la risposta.
(e) Si esprima γ^{-1} come espressione polinomiale di potenze di γ a esponenti interi ≥ 0 e a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6. (Per coloro che devono registrare un credito in più.)
Sia A un anello con unità.

(a) Si dia la definizione di *caratteristica* di A.
(b) Si provi che se A è privo di divisori dello zero, allora la caratteristica di A è zero o un numero primo.
(c) Si provi che il numero di elementi di un campo finito è una potenza di un primo.